ediciones sm

Estudio y representación de funciones

1. Considera la función $f(x) = -x^2 - 3x + 10$.

a) Calcula su dominio.

b) Halla los puntos de corte con los ejes coordenados.

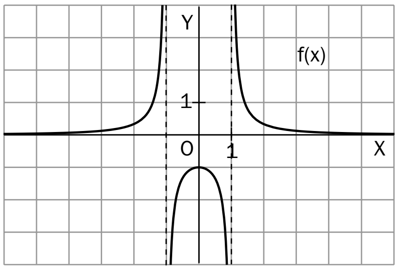
c) Determina sus extremos.

d) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Estudia la curvatura.

f) Dibuja su gráfica.

2. A la vista de la siguiente gráfica, determina:



a) El dominio de la función.

b) Las asíntotas.

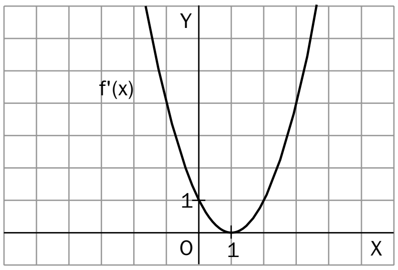
c) Los intervalos de monotonía.

d) Los extremos.

e) La curvatura.

f) Los puntos de inflexión.

3. La siguiente gráfica representa la función derivada de una función f:



a) ¿Cuál es el dominio de f?

b) ¿Puede tener f asíntotas verticales?

c) ¿Dónde crece y dónde decrece f?

d) ¿Cuáles son los máximos y los mínimos de f?

4. Representa la función $f(x) = x - x^3$.

5. Representa la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$.

6. Representa la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x + 1}$.

SOLUCIONES

1. a) D (f) = $\mathbb{R}$

b) $(-5, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 10)$

c) $f'(x) = -2x - 3$

$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$

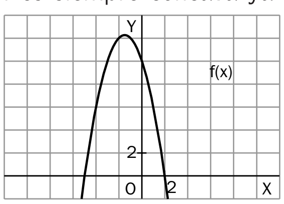
$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ máximo.

d) $f'(x) = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)$

f creciente en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ y decreciente en $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$

e) f es siempre cóncava ya que $f''(x) = -2 < 0$.

f)



2. a) D (f) = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son las asíntotas verticales. La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal. La función no tiene asíntotas oblicuas.

c) f es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 0)$, y es decreciente en $(0, 1)$ y en $(1, +\infty)$.

d) Tiene un máximo en $(0, -1)$. No tiene mínimos.

e) f es convexa en $(-\infty, -1)$ y en $(1, \infty)$, y es cóncava en $(-1, 1)$.

f) No tiene puntos de inflexión.

3. a) D (f) = $\mathbb{R}$, pues su función derivada existe siempre, luego f existe y es derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) No, por ser derivable en $\mathbb{R}$, es continua en $\mathbb{R}$.

c) Creciente en $(-\infty, 1)$ pues $f' > 0$, y decreciente en $(1, +\infty)$ pues $f' < 0$.

d) No tiene extremos. El posible extremo sería el punto $(1, 0)$, pues $f'(1) = 0$, pero se trata de un punto de inflexión ya que $f''(1) = 0$ (la tangente a f' en el punto de abscisa $x = 1$ es horizontal) y la función cambia de curvatura (a su izquierda $f'' < 0$ por ser f' decreciente y a su derecha $f'' > 0$ por ser f' creciente).

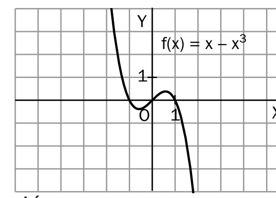
4. D (f) = $\mathbb{R}$; $f'(x) = 1 - 3x^2 = -3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f''(x) = -6x$; $f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ es máximo.

$f''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ es mínimo.

f es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ y es creciente en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.



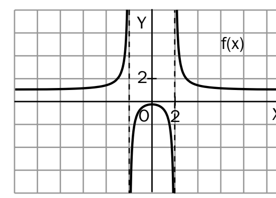
$f''(x) = 0 \iff x = 0$

f es convexa en $(-\infty, 0)$;

f es cóncava en $(0, +\infty)$.

El punto $(0, 0)$ es de inflexión.

5. D (f) = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$



$f'(x) = -\frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$

$f''(x) = \frac{30x^2 + 40}{(x^2 - 4)^3}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

f es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, 0)$, y es decreciente en $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$; $f''(0) < 0 \Rightarrow \left(0, \frac{-1}{4}\right)$ es un máximo.

$f''(x) = 0 \iff 30x^2 + 40 = 0$, lo que es imposible.

No hay puntos de inflexión.

Si $x < -2$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ f es convexa en $(-\infty, -2)$.

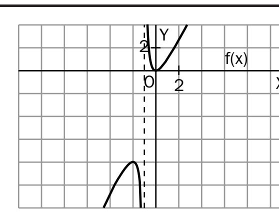
Si $-2 < x < 2$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava en $(-2, 2)$.

Si $x > 2$, $f''(x) > 0$, $\Rightarrow$ f es convexa en $(2, +\infty)$.

Las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Como $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, $y = 1$ es asíntota horizontal.

6. D (x) = $\mathbb{R} - \{-1\}$



$f'(x) = \frac{2x(x + 2)}{(x + 1)^2}$

$f''(x) = \frac{4}{(x + 1)^3}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0, x = -2$

$f''(-2) < 0 \Rightarrow (-2, -8)$ es un máximo.

$f''(0) > 0 \Rightarrow (0, 0)$ es un mínimo.

f es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$, y es decreciente en $(-2, -1)$ y en $(-1, 0)$.

$f''(x) = 0 \iff 4 = 0$, lo que es imposible. No hay puntos de inflexión.

Si $x < -1$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava en $(-\infty, -1)$.

Si $x > -1$, $f''(x) > 0$, $\Rightarrow$ f es convexa en $(-1, +\infty)$.

La recta $x = -1$ es asíntota vertical.

No hay asíntotas horizontales.

La recta $y = 2x - 2$ es asíntota oblicua.