ediciones sm

Distribución normal

1. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$

a) Dibuja su gráfica.

b) Comprueba que es una función de densidad.

2. Se considera la tabla de frecuencias agrupadas:

Intervalo	[60-63)	[63-66)	[66-69)	[69-72)	[72-75)
Frecuencia	5	18	42	27	8

a) Dibuja el histograma y calcula la media y la desviación típica.

b) Calcula la probabilidad de que una variable normal, con media y desviación típica iguales a las obtenidas en el apartado anterior, sea mayor que 69.

3. Los pesos de los niños recién nacidos en una determinada comunidad están normalmente distribuidos, con media 3,5 kilogramos y desviación típica 0,2 kilogramos.

Usa las indicaciones de probabilidad de las distribuciones normales y calcula los intervalos que contienen los pesos del 68, 95 y 99 % de los recién nacidos en la comunidad.

4. Se sabe que Z es una variable aleatoria que se distribuye según una N(0, 1). Calcula:

a) $p(Z \leq 1{,}25)$ b) $p(Z \geq 0{,}03)$ c) $p(Z \leq -1{,}87)$ d) $p(-1{,}96 \leq Z < 1{,}25)$

5. Determina el valor o los valores de la variable aleatoria Z en cada uno de los siguientes casos, en los que el área dada se refiere a una distribución N(0, 1):

a) Área entre 0 y $z = 0{,}3770$ b) Área a la izquierda de $z = 0{,}8621$

6. En una prueba de matemáticas, sobre 10 puntos, la media de las calificaciones ha sido 6,7 y la desviación típica 1,2. Sabiendo que las calificaciones son números enteros y están normalmente distribuidas, determina el porcentaje de calificaciones iguales a 8 puntos.

7. Se sabe que un determinado modelo de magnetoscopio tiene una duración media de 15 años con una desviación típica de 0,5 años. Suponiendo una distribución normal de la duración, calcula la probabilidad de que uno de estos magnetoscopios dure más de 12 años.

8. Una máquina produce botones, de los que el 10 % son defectuosos. Se toma al azar una muestra de 400 botones. Calcula la probabilidad de que en la muestra:

a) Como mucho 30 botones sean defectuosos.

b) Haya entre 30 y 50 botones defectuosos.

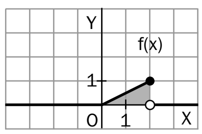
9. La siguiente tabla muestra los resultados del estudio de la variable «consumo diario de leche maternizada en niños de dos meses»:

Consumo (g)	[45, 50)	[50, 55)	[55, 60)	[60, 65)	[65, 70)	[70, 75)	[75, 80)	[80, 85)
N.º de niños	13	32	63	56	60	44	29	19

Halla la probabilidad de que un niño, elegido al azar, consuma como máximo 60 gramos de leche al día.

SOLUCIONES

1. a)



b) $f(x) \geqslant 0$ y el área encerrada bajo la curva y el eje OX es igual a la unidad.

2. a) $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i f_i}{N} = \dfrac{6\,795}{100} = 67{,}95$

$S^2 = \dfrac{\Sigma x_i^2 f_i}{100} - \overline{x}^2 = 4\,625{,}73 - 4\,617{,}2025 =$
$= 8{,}5275;\ S = \sqrt{S^2} = 2{,}92.$

b) Sea X con distribución: N(67,95; 2,92).

$p(X > 69) = p\left(Z > \dfrac{69 - 67{,}95}{2{,}92}\right) =$

$p = p(Z > 0{,}36) = 1 - p(Z \leqslant 0{,}36) = 0{,}3594$

3. — En el intervalo $(\mu - \sigma,\ \mu + \sigma) = (3{,}3;\ 3{,}7)$ están el 68,26 % de los individuos, por lo tanto, aproximadamente el 68 % de los recién nacidos tendrán pesos comprendidos entre 3,3 y 3,7 kg.

En el intervalo $(\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma) = (3{,}1;\ 3{,}9)$ están el 95,44 % de las observaciones; el 95 % de los recién nacidos pesarán entre 3,1 y 3,9 kg.

— En el intervalo $(\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma) = (2{,}9;\ 4{,}1)$ está el 99,74 % de los individuos; prácticamente todos los recién nacidos pesarán entre 2,9 y 4,1 kg.

4. a) $p(Z \leqslant 1{,}25) = 0{,}8944$

b) $p(Z \geqslant 0{,}03) = 1 - p(Z \leqslant 0{,}03) = 0{,}4880$

c) $p(Z \leqslant -1{,}87) = p(Z > 1{,}87) =$
$= 1 - p(Z \leqslant 1{,}87) = 1 - 0{,}9693 = 0{,}0307$

d) $p(-1{,}96 \leqslant Z < 1{,}25) =$
$= p(Z \leqslant 1{,}25) - p(Z \leqslant -1{,}96) =$
$= p(Z \leqslant 1{,}25) - [1 - p(Z \leqslant 1{,}96)] =$
$= 0{,}8944 - [1 - 0{,}9750] = = 0{,}8694$

5. a) $0{,}3770 = p(0 < Z \leqslant z) = p(Z \leqslant z) - p(Z \leqslant 0) =$
$= p(Z \leqslant z) - 0{,}5 \Rightarrow p(Z \leqslant z) = 0{,}8770 \Rightarrow z = 1{,}16$

b) $0{,}8621 = p(Z \leqslant z) \Rightarrow z = 1{,}09$

6. La variable aleatoria discreta X: «Puntuación en la prueba de matemáticas» tiene como recorrido: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Sin embargo, el enunciado indica que se haga un tratamiento continuo del problema, lo que equivale a agrupar las puntuaciones en intervalos de clase y trabajar con la distribución normal N(6,7; 1,2).

Intervalos: [−0,5; 0,5), [0,5; 1,5), [1,5; 2,5), [2,5; 3,5), [3,5; 4,5), [4,5; 5,5), [5,5; 6,5), [6,5; 7,5), [7,5; 8,5), [8,5; 9,5) y [9,5; 10,5).

$p(7{,}5 \leqslant X \leqslant 8{,}5) = p(X \leqslant 8{,}5) - p(X \leqslant 7{,}5) =$
$= p(Z \leqslant -1{,}5) - p(Z \leqslant 0{,}67) = 0{,}9332 - 0{,}7486 =$
$= 0{,}1846$

El porcentaje pedido es 18,46 %.

7. La variable «duración del magnetoscopio» sigue una distribución: N(15, 0,5)

$p(X > 12) = 1 - p(X \leqslant 12) = 1 - p\left(Z \leqslant \dfrac{12 - 15}{0{,}5}\right) =$
$= 1 - p(Z \leqslant -6) = 1 - [1 - p(Z \leqslant 6)] = 1 - [1 - 1] = 1$

Teóricamente, es seguro que el magnetoscopio dure más de 12 años, si bien, debido a que la normal es una curva asintótica, siempre hay un margen de error que podría provocar que el magnetoscopio no durara más de 12 años, aunque esto sería rarísimo. En la práctica es casi seguro que dure más de 12 años.

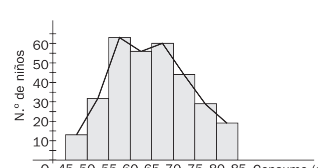
8. La variable X: «Número de botones defectuosos» sigue una distribución B(400; 0,1).

Como $np = 40 \geqslant 5$ y $nq = 360 \geqslant 5$, se aproxima la variable X por la variable X′: N(40, 6).

a) $p(X \leqslant 30) = p(X' \leqslant 30{,}5) =$
$= p\left(Z \leqslant \dfrac{30{,}5 - 40}{6}\right) = p(Z \leqslant -1{,}58) =$
$= 1 - p(Z \leqslant 1{,}58) = 1 - 0{,}9429 = 0{,}0571$

b) $p(30 \leqslant X \leqslant 50) = p(29{,}5 < X' \leqslant 50{,}5) =$
$= p\left(\dfrac{29{,}5 - 40}{6} \leqslant Z \leqslant \dfrac{50{,}5 - 40}{6}\right) =$
$= p(-1{,}75 \leqslant Z \leqslant 1{,}75) = 1 - 2p(Z > 1{,}75)$
$= 1 - 2[1 - p(Z \leqslant 1{,}75)] = 1 - 2(1 - 0{,}9599) =$
$= 1 - 2 \cdot 0{,}0401 = 0{,}9198$

9.



En vista de que recuerdan la curva normal, se procede al ajuste por una normal tomando como x_i la marca de clase del intervalo i-ésimo.

$\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i f_i}{N} = \dfrac{20\,475}{316} = 64{,}8$

$S^2 = \dfrac{\Sigma x_i^2 f_i}{100} - x^2 = \dfrac{1\,352\,725}{100} - 4\,199{,}04 = 81{,}74$

$S = \sqrt{S^2} = 9{,}04$

La normal buscada es N(64,8; 9,04).

$p(X \leqslant 60) = p\left(Z \leqslant \dfrac{60 - 64{,}8}{9{,}04}\right) = p(Z \leqslant -0{,}53) =$
$= 1 - p(Z \leqslant 0{,}53) = 1 - 0{,}7019 = 0{,}2981$

La probabilidad pedida es 0,2981.