ACTIVIDADES DE SÍNTESIS

9. A partir de $\log_2 2$ y de $\log_2 4$, halla mediante interpolación lineal $\log_2 3$. ¿Qué valor daría la función de interpolación para $\log_2 5$?

10. La profundidad en metros del agua de un puerto según la hora, t, del día varía según la función $f(t) = 7 + 5 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6}$.

a) ¿Cuál es el nivel del mar a las 5 de la mañana? ¿Y las 3 de la tarde?

b) Halla el período de la función.

c) ¿A qué horas se produce la pleamar? ¿A qué horas la bajamar?

d) Señala los períodos del día en los que crece la marea y en cuáles decrece.

11. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + 2x - 1}{2x(x - 1)^2}$

12. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 2 \\ x + a & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de a para que sea continua en 2.

b) Con el valor de a obtenido, ¿es f derivable en 2?

13. Sea la parábola $f(x) = x^2 - ax$.

a) Halla el valor de a sabiendo que $f'(1) = -2$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = 1$.

14. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^5 + L(\cos x)$ b) $f(x) = 5 \operatorname{sen} 4x$ c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x - 1}$

15. Estudia y representa $f(x) = \dfrac{x^2}{(x - 4)^2}$.

16. Las notas de matemáticas y física de un grupo de alumnos son:

Matemáticas	2	3	1	7	7	6	8	9
Física	2	4	2	8	9	6	8	9

Representa la nube de puntos y estudia si hay correlación lineal significativa, y de qué signo, entre las calificaciones de matemáticas y física.

17. La probabilidad de que una persona mayor de 25 años tenga estudios universitarios es 0,2. Determina la probabilidad de que, de 5 personas elegidas al azar, a) ninguna, b) exactamente una, c) al menos una, tenga estudios universitarios.

18. Un equipo de baloncesto ha obtenido en los últimos años unos resultados que se distribuyen normalmente con una media de 23 victorias y una desviación típica de 6. Encuentra la probabilidad de que gane entre 22 y 27 partidos.

19. Un tirador de dardos acierta 8 de cada 10 lanzamientos. Utilizando la aproximación de la binomial por la normal, encuentra la probabilidad de que de 50 lanzamientos acierte 45.

SOLUCIONES

9. $f(x) = ax + b$ pasa por $A(2, 1)$ y $B(4, 2)$.

Resolviendo el sistema $f(x) = \frac{x}{2}$.

$\log_2 3 = f(3) = 1{,}5$ y $\log_2 5 = f(5) = 2{,}5$

10. a) $f(5) = 9{,}5$ m; $f(15) = 12$ m

b) $t = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 12$. El período es 12 h.

c) f tiene un máximo a las 3 de la mañana y a las 3 de la tarde, en esas horas se produce la pleamar, y tiene un mínimo a las 9 de la mañana y a las 9 de la noche, que es cuando se produce la bajamar.

d) Decrece en (3, 9) y en (15, 21). El resto del día, sin contar las horas en las que se producen la pleamar y la bajamar, crece.

11. a) 0 b) $\frac{3}{2}$ c) 1

12. a) $f(2) = 2 + a$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2 + a$;

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \Rightarrow 2 + a = \Rightarrow a = -1$

b) No es derivable, pues $f'(2)^- = 4 \neq 1 = f'(2)^+$.

13. a) $f'(x) = 2x - a$; $f'(1) = 2 - a = -2 \Rightarrow a = 4$

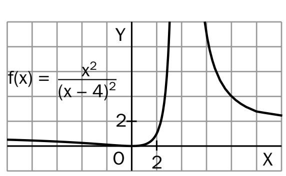
b) $y - 3 = -2(x - 1) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$

14. a) $f'(x) = 5x^4 - \operatorname{tg} x$

b) $f'(x) = 20 \cos 4x$

c) $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2}{(x - 1)^2}$

15. $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$



Corte con los ejes:

(0, 0)

No es simétrica.

Asíntotas:

$x = 4$; $y = 1$

$f'(x) = \dfrac{-8x}{(x - 4)^3}$; $f''(x) = \dfrac{16x + 32}{(x - 4)^4}$

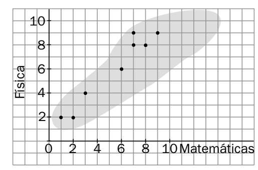
Crece en (0, 4) y decrece en $(-\infty, 0)$ y $(4, +\infty)$.

Tiene un mínimo en (0, 0); no tiene máximos.

Es cóncava en $(-\infty, -2)$ y convexa en $(-2, 4)$ y $(4, +\infty)$.

Punto de inflexion: $\left(-2, \frac{1}{9}\right)$

16.



$\overline{m} = 5{,}38$
$\overline{f} = 6$
$S_f^2 = 7{,}75$
$S_m^2 = 7{,}6806$
$S_{mf} = 7{,}47$

El coeficiente de correlación lineal $r = \dfrac{S_{mf}}{S_m \cdot S_f} = 0{,}963$ es un valor muy próximo a 1, lo que asegura una correlación muy fuerte y positiva.

17. La variable aleatoria X: «Número de personas seleccionadas con estudios universitarios» sigue una distribución $B(5, 0{,}2)$.

a) $p(X = 0) = \binom{5}{0} 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}3277$

b) $p(X = 1) = \binom{5}{1} 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096$

c) $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}3277 = 0{,}6723$

18. La variable aleatoria continua X: «Número de victorias anuales» sigue una distribución $N(23, 6)$:

$p(22 \leqslant X \leqslant 27) = p\left(\dfrac{22 - 23}{6} \leqslant Z \leqslant \dfrac{27 - 23}{6}\right) =$

$= p(-0{,}17 \leqslant Z \leqslant 0{,}67) =$

$= p(Z \leqslant 0{,}67) - p(Z \leqslant -0{,}17) =$

$= p(Z \leqslant 0{,}67) - [1 - p(Z \leqslant 0{,}17)] =$

$= 0{,}7486 - [1 - 0{,}5675] = 0{,}3161$

19. La variable X: «Número de aciertos en 50 lanzamientos» se distribuye según una $B(50, 0{,}8)$.

Como $n \cdot p = 40 \geqslant 5$; y $n \cdot q = 10 \geqslant 5$, se aproxima la variable X por la variable continua X′, que se distribuye según una $N(40, \sqrt{8})$.

$p(X = 45) = p(44{,}5 < X' \leqslant 45{,}5) = p\left(\dfrac{44{,}5 - 40}{\sqrt{8}} < Z \leqslant \dfrac{45{,}5 - 40}{\sqrt{8}}\right) =$
$= p(1{,}59 < Z \leqslant 1{,}94) = p(Z \leqslant 1{,}94) - p(Z \leqslant 1{,}59) =$
$= 0{,}9738 - 0{,}9441 = 0{,}0297$