

Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y = 5 \\ -10x + 5y = -25 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases}$$

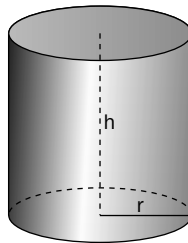
2. Resuelve encontrando previamente un sistema triangular equivalente:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = -8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ 2x - 3y = 1 \\ -2x + 4y - 3z = -4 \end{cases}$$

3. Resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -2x^2 + 7y^2 = 17 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

4. El volumen de un cilindro recto es $63\pi \text{ cm}^3$ y su altura es 1 cm mayor que el doble de la medida del radio. Encuentra las dimensiones del cilindro.



5. En un número de dos dígitos, el de las unidades excede en dos al triplo del de las decenas. Si se cambian los dígitos de posición, la diferencia entre el nuevo número y el original es de 36 unidades. ¿Cuál es el número inicial?

6. Se quiere repartir 17 200 euros entre tres socios de modo que por cada 2 euros que reciba el primero, el segundo reciba 3 y no sobre ningún euro, y por cada 5 euros que reciba el segundo, el tercero reciba 6 y tampoco sobre ninguno. ¿Cuánto dinero recibirá cada socio?

SOLUCIONES

$$1. \text{ a) } \begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x = 11 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = 1, y = -2$$

b) Se divide la 2.^a ecuación por -5 :

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 5$$

Infinitas soluciones

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 12y = 4 \\ -8x + 12y = 7 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones se obtiene $0 = 11$, por tanto el sistema no tiene solución.

2. a) Restando a la 2.^a ecuación la 1.^a, y a la 3.^a dos veces la 1.^a:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + 2z = 2 \\ -y - 2z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Simplificando la 2.ª} \\ \text{3.ª} - 2 \cdot \text{1.ª} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 & z = 3 \\ -y + z = 1 & \Rightarrow y = z - 1 = 2 \\ -3z = -9 & x = z - y = 1 \end{cases}$$

b) Restando a la 2.^a la 1.^a y sumando a la 3.^a la 1.^a:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ -2y + z = -4 \\ 3y - 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow (3 \cdot \text{1.ª} + 4 \cdot \text{2.ª})$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 5 & y = 3 \\ -2y + z = -4 & \Rightarrow z = 2 \\ -5y = -15 & x = 5 \end{cases}$$

$$3. \text{ a) } \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2y^2 = 36 \Leftrightarrow y = \sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$$

$$\text{Solución: } x = y = +3\sqrt{2}; x = y = -3\sqrt{2}$$

b) Sumando a la 2.^a, dos veces la 1.^a:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 9y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow y = \pm \frac{5}{3} \Rightarrow x^2 = 4 - y^2 = \frac{11}{9} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{11}}{3}; y = \pm \frac{5}{3}$$

$$c) \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ (4 - y)y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$4y - y^2 = 3 \Leftrightarrow y = 3, y = 1$$

Para $y = 3$, $x = 1$; para $y = 1$, $x = 3$.

4. El volumen del cilindro es igual al área de la base por la altura. Si h representa la medida de la altura en centímetros, se tiene: $63\pi = \pi r^2 h$, donde r representa la medida del radio de la base.

Como $h = 2r + 1$ se obtiene:

$$63\pi = \pi r^2 (2r + 1) \Leftrightarrow 2r^3 + r^2 - 63 = 0 \Leftrightarrow (r - 3)(2r^2 + 7r + 21) = 0$$

La ecuación de segundo grado $2r^2 + 7r + 21 = 0$ no tiene solución en \mathbb{R} ya que su discriminante es negativo; por tanto, la única solución de la ecuación es $r = 3$; $h = 7$.

El radio mide 3 cm y la altura 7 cm.

5. Sean x las decenas e y las unidades del número, que se expresa $10x + y$.

$$\begin{cases} y - 2 = 3x \\ (10y + x) - (10x + y) = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ -x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 2x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

El número buscado es 15.

6. Sean A , B y C los euros que reciben el primer, segundo y tercer socio respectivamente.

$$\begin{cases} A + B + C = 17\,200 \\ \frac{A}{2} = \frac{B}{3} \\ \frac{B}{5} = \frac{C}{6} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$C = 7\,200; B = 6\,000; A = 4\,000$$

Solución: El primer socio recibe 4 000 euros, el segundo 6 000 y el tercero 7 200 euros.