1 Números racionales

EN LA VIDA COTIDIANA... El código de barras

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

- Reconocer la estructura de los códigos de barras. • Calcular el dígito de control de un código de barras.
- Relacionar el cálculo del dígito de control con los números racionales y decimales.

1 Estructura del código de barras y su dígito de control

Actualmente las empresas identifican sus productos con un código de barras. Así, en los supermercados, al pasar el código de cada artículo por el lector óptico, este identifica el artículo, busca su precio en la base de datos del supermercado y lo apunta en el tíquet.

El código de barras es un sistema de identificación que permite controlar la gestión de mercancías y racionalizar su suministro. Cada código de barras lleva asociado un número para facilitar su interpretación. Cuando hablamos de código de barras, nos referimos a dicho número, ya que es más fácil trabajar con él.

Existen varios tipos de codificación, y en Europa el más extendido es el llamado EAN13. Consta de trece dígitos que identifican cada producto de forma inequívoca:

9 788429 436723

- Los tres primeros dígitos indican que el código es un ISBN y los dos siguientes corresponden al país. En el ejemplo son 84, los dígitos asociados a España.
- Las siguientes siete cifras identifican la empresa y el producto, en el ejemplo 294 corresponde a la editorial Santillana y 3672 identifica el producto.
- La última cifra es el llamado dígito de control y se calcula en función de las otras doce cifras. En este caso es el 3. Con el dígito de control se pueden detectar errores en los códigos del país, la empresa o el producto.

Método de cálculo del dígito de control

Vamos a hallar el dígito de control del código de barras del ejemplo y comprobar que está bien calculado.

1.º Tomamos las doce primeras cifras por la izquierda (todas menos la última): 978842943672. Multiplicamos los términos impares por 1 y los pares por 3. El resultado es:

$$9, 21, 8, 24, 4, 6, 9, 12, 3, 18, 7, 6$$

2.º Sumamos los valores resultantes en el paso anterior:

$$9 + 21 + 8 + 24 + 4 + 6 + 9 + 12 + \\ + 3 + 18 + 7 + 6 = 127$$

3.º Dividimos la suma resultante entre 10 y tomamos el resto de la división.

$$\frac{127}{10} = 12 \text{ de cociente y } 7 \text{ de resto}$$

4.º El dígito de control es el resultado de restar a 10 el resto del paso anterior: $10 - 7 = 3$.

Por tanto, el dígito está bien calculado.

Importante: Si el resto de la división del paso 3.º fuese 0, tomaríamos 0 como dígito de control.

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *En un supermercado han aparecido algunos códigos con dígitos de control mal calculados. Indica en cuál de los códigos es erróneo ese dígito.*

9789501266566 *8411111500001*
9788429464115 *5449000000996*

b) *Observa que estos dos códigos tienen el mismo dígito de control: 8410201030106 y 8420101030106.*

- *Fíjate en el orden de las cifras de ambos números. ¿Qué observas?*
- *¿Podrías construir rápidamente varios códigos con las mismas cifras, de manera que su dígito de control fuese el mismo?*

c) *Invéntate una forma de calcular los dígitos de control, similar a la usada en EAN13.*

2 Cálculo del dígito de control con números racionales y decimales

El método de cálculo del dígito de control para los códigos de barras se basa en operaciones sencillas con números naturales.

En el paso 3.º se trata de realizar un cociente en el que el divisor es siempre 10. Sabiendo que una de las posibles interpretaciones de una fracción es como cociente de dos números, vamos a analizar la relación entre el método de cálculo del dígito de control y los números racionales.

Imagina que el resultado obtenido en el paso 3.º fuera 121. En este caso tendríamos el cociente 121 : 10, que expresado como fracción sería $\frac{121}{10}$.

Las fracciones cuyo denominador es una potencia de 10 se llaman fracciones decimales.

Esta fracción podemos escribirla como suma de un número entero y una fracción impropia, es decir, expresarla como número mixto.

$$\frac{121}{10} = 12 + \frac{1}{10}$$

¿Qué fracción deberíamos sumar a la fracción anterior para obtener un número entero?

Esa fracción será lo que le falta a la parte fraccionaria de la descomposición, $\frac{1}{10}$, para llegar a la unidad.

$$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

El numerador de esta fracción, 9, es el dígito de control correspondiente a la suma 121. *Compruébalo por ti mismo.*

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *A continuación tienes las sumas obtenidas en el paso 3.º para cuatro códigos distintos. Calcula el dígito de control asociado utilizando fracciones.*

76 84 117 135

b) *Halla, en cada caso, el valor de la suma obtenida en el paso 3.º, sabiendo el valor del dígito de control y del número entero obtenido en la descomposición.*

– Número entero: 7, dígito de control: 4.

– Número entero: 10, dígito de control: 2.

– Número entero: 9, dígito de control: 7.

También es posible calcular el dígito de control usando números decimales.

Hemos visto que, una vez obtenida la suma de las cifras, calculamos el cociente y el resto de su división entre 10. Ahora bien, se puede trabajar de igual forma expresando el resultado de esa división como un número decimal.

Así, podemos calcular el resultado de manera rápida, separando la cifra de la derecha con una coma, ya que dividimos entre 10. En el caso anterior, para la suma 121 tendríamos como resultado 12,1.

Restando este número del entero inmediatamente superior, 13, tendríamos:

$$13 - 12{,}1 = 0{,}9$$

La cifra de las décimas del resultado, 9, es el dígito de control.

REALIZA LA SIGUIENTE ACTIVIDAD.

A continuación tienes las sumas obtenidas en el paso 3.º para cuatro códigos. Determina el dígito de control asociado utilizando números decimales.

95 74 106 132

2 Números reales

EN LA VIDA COTIDIANA... La Tierra y sus movimientos

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Utilizar la notación científica para manejar números muy grandes. • Trabajar con los movimientos de la Tierra. • Calcular la velocidad de los diferentes movimientos terrestres. • Conocer la participación española en las investigaciones geográficas.

1 Localización de puntos en la Tierra

Para situar puntos en la esfera terrestre hace falta definir un sistema de coordenadas. ¿Sabes cuáles son las coordenadas que definen la situación de cualquier punto en la Tierra?

En primer lugar se define como ecuador la línea imaginaria formada por el círculo máximo perpendicular al eje de giro de la Tierra. A partir de él situamos los puntos hacia el Norte y hacia el Sur.

La situación de un punto respecto al ecuador se llama latitud y va de 0 a 90 grados.

También tenemos que definir un meridiano cero o línea vertical que nos sirva para situar los puntos al Este y Oeste respecto a él. El meridiano que se utiliza en la actualidad es el que pasa por Greenwich (Gran Bretaña).

La situación de un punto respecto a este meridiano cero se llama longitud y va de 0 a 180 grados.

Cada punto de la Tierra queda determinado de manera inequívoca con esas coordenadas: los grados de su latitud (Norte o Sur respecto al ecuador) y los grados de su longitud (Este u Oeste respecto al meridiano cero).

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Investiga dónde está Greenwich y por qué se eligió ese meridiano.*

b) *¿Cuándo se eligió dicho meridiano?*

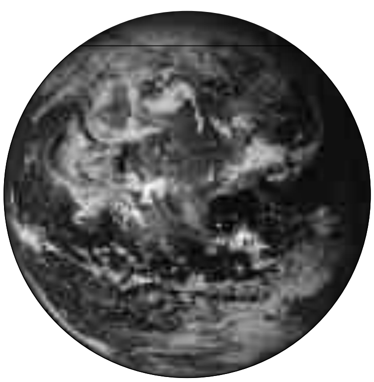
c) *Este meridiano pasa por el territorio español. Ayudándote de un atlas, señala alguna localidad que tenga longitud 0°.*

d) *Investiga sobre la evolución de las representaciones cartográficas.*

2 Forma y tamaño de la Tierra

La Tierra tiene, aproximadamente, la forma de una gran esfera. Estudios recientes han descubierto que está algo achatada por algunas zonas, pero para los cálculos que te pedimos que hagas a continuación vamos a considerar que tiene la forma de una esfera perfecta.

Cuando realices las actividades que te proponemos, expresa los resultados en notación científica.



REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *La principal unidad de longitud: el metro, se definió como la diezmillonésima parte del cuadrante (cuarta parte) del meridiano terrestre. ¿Cuál será la longitud del meridiano terrestre en metros?*

b) *Una milla náutica, que es una unidad utilizada en navegación, equivale a la longitud de un minuto del meridiano terrestre. Teniendo en cuenta que un meridiano terrestre mide 360º, calcula la longitud de una milla náutica en metros.*

c) *Si pudieras hacer un túnel que atravesara la Tierra pasando por el centro de la misma, ¿adónde llegarías? A ese punto se le llama antípodas.*

d) *Utilizando la definición de metro, calcula cuál es la longitud del radio de la Tierra.*

e) *Ahora que ya conoces el radio de la Tierra, calcula su volumen.*

f) *Si la densidad media de la Tierra es de 5,5 toneladas por metro cúbico, ¿cuál es su peso?*

3 Movimiento de rotación de la Tierra

La Tierra realiza un movimiento de rotación que le lleva a dar una vuelta sobre su eje de giro cada 24 horas. El resultado más tangible de este movimiento es la alternancia de los días y las noches.

En la fotografía siguiente, tomada desde la Luna, puedes apreciar la línea oscura que separa la parte de la Tierra en la que es de día de aquella en la que es de noche.

REALIZA LAS ACTIVIDADES.

a) *Al rotar la Tierra sobre sí misma, cada punto describe una circunferencia. La longitud de esa circunferencia, ¿es la misma para todos los puntos? ¿En cuáles es mayor? ¿Y menor?*

b) *Calcula la velocidad de rotación de la Tierra en el ecuador en metros por segundo. Para ello halla la longitud de la circunferencia en el ecuador y divídela entre los segundos que tiene un día.*

c) *Halla la velocidad de rotación aproximada que hay en el lugar donde vives. Toma como radio de la circunferencia en dicho lugar:*

$$r = R\left(1 - \frac{\text{grados de latitud}}{90°}\right)$$

siendo R *el radio de la Tierra.*

d) *¿Hay otros lugares de la Tierra en los que sus habitantes se desplacen a la misma velocidad de rotación que tú? Indica alguno de ellos.*

4 Movimiento de traslación de la Tierra

Aunque a lo largo de la historia ha habido otras teorías, la Tierra se mueve alrededor del Sol, en el movimiento que se llama de traslación. Ese movimiento, junto con la inclinación de su eje de giro, origina las estaciones.

La trayectoria que sigue es una elipse, pero resulta tan parecida a una circunferencia que podemos considerar que es un movimiento circular.

HAZ LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *¿Cuánto tiempo tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del Sol?*

b) *Calcula la velocidad de traslación de la Tierra alrededor del Sol en kilómetros por hora.*
Ten en cuenta que la distancia media de la Tierra al Sol es de 150 millones de kilómetros aproximadamente.

5 Un recorrido por la Historia

Fijar la forma y el tamaño de la Tierra, así como su situación respecto a las estrellas, ha constituido un reto a lo largo de miles de años.

En ese proceso han participado también científicos españoles, destacando su aportación en dos hechos:

- La medición de la longitud del ecuador (realizada en el territorio de la actual República de Ecuador), donde participó el español Jorge Juan (en la fotografía).
- La medida del arco de meridiano Dunkerke-Barcelona para fijar, a partir de la misma, la longitud del metro.

HAZ ESTA ACTIVIDAD.

Realiza un trabajo de investigación en el que, para cada uno de estos dos acontecimientos, señales la situación política y económica en la que se desarrollaron, las cuestiones matemáticas que pretendían resolver y los problemas que superaron. Puedes añadir, además, todos los aspectos que consideres interesantes.

3 Polinomios

EN LA VIDA COTIDIANA... El NIF y el número de la Seguridad Social

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Calcular la letra que corresponde a cada número de DNI. • Hallar el dígito de control de un número de la Seguridad Social. • Obtener la letra del DNI utilizando polinomios. • Calcular el dígito de control del número de la Seguridad Social con polinomios.

1 Cálculo de la letra de un número de DNI y del dígito de control de un número de la Seguridad Social

El NIF (Número de Identificación Fiscal) está formado por la unión del número de DNI y una letra, asociada a ese número de manera única.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Enrique ha ido a una agencia de viajes a hacer una reserva. Para hacerlo le piden su NIF. Recuerda su número de DNI, 5.366.821, pero no la letra que le corresponde. ¿Cómo puede calcularla?

Método de cálculo

Para obtener la letra asociada al número tenemos que seguir estos pasos.

1.º Dividimos el número del DNI entre 23, sin obtener decimales, y apuntamos el resto de la división.

5.366.821 : 23 = 233.340,0434...

Cociente: 233.340; Resto: 1

2.º Miramos en esta tabla qué letra está asociada al resto, el número 1. La letra es la R.

A	3	J	13	S	15
B	11	K	21	T	0
C	20	L	19	V	17
D	9	M	5	W	2
E	22	N	12	X	10
F	7	P	8	Y	6
G	4	Q	16	Z	14
H	18	R	1		

HAZ LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Determina la letra de los siguientes NIF.*

49.125.369 *36.713.405*

22.557.217 *15.151.515*

b) *Escribe tres números distintos de DNI que tengan asociada la misma letra.*

El número de la Seguridad Social tiene 12 cifras. Las dos primeras son el indicativo provincial, después vienen 8 cifras, siendo la primera de estas 1 o 0, y acaba en dos cifras que se llaman dígito de control.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Luisa trabaja en un centro de salud y, al introducir un número de la Seguridad Social en el ordenador, este le avisa de que el dígito de control es erróneo. ¿Cómo se calcula el dígito de control?

Método de cálculo

El dígito de control se obtiene a partir de las otras 10 cifras del número de la siguiente forma.

1.º Miramos la tercera cifra por la izquierda, que será un 1 o un 0. Si es un 1, tomamos las 10 cifras, formando un número. Si es un 0, prescindimos de él y formamos un número con las otras 9 cifras.

2.º Dividimos ese número entre 47 y apuntamos el resto de la división, que escribimos como un número de dos cifras. Ese resto es el dígito de control.

REALIZA ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Comprueba que el dígito de control de estos números es correcto: 281038585534; 160123456733.*

b) *Calcula el dígito de control para estos grupos de 10 números: 4612568974; 2102365984.*

2 Cálculo de la letra del DNI y del dígito de control utilizando polinomios

Aunque en la realidad el cálculo de la letra del DNI se hace como hemos visto anteriormente, podríamos realizar esa asociación de número y letra con un método alternativo utilizando polinomios.

Una forma sencilla y rápida de asignar una letra a un número de manera coherente sería:

1.º Tomamos el número del DNI. Este número tiene 7 u 8 cifras. Si tiene 7 cifras lo multiplicamos por 10 hasta conseguir un número de 8 cifras.

2.º Sustituimos dicho número en el polinomio siguiente y calculamos su valor numérico.

$$P(x) = \frac{x}{99.999.999} + 1$$

3.º Determinamos el intervalo al que pertenece ese número según la tabla y le asociamos la letra correspondiente.

A	[1,10; 1,14)	N	[1,58; 1,62)
B	[1,14; 1,18)	P	[1,62; 1,66)
C	[1,18; 1,22)	Q	[1,66; 1,70)
D	[1,22; 1,26)	R	[1,70; 1,74)
E	[1,26; 1,30)	S	[1,74; 1,78)
F	[1,30; 1,34)	T	[1,78; 1,82)
G	[1,34; 1,38)	V	[1,82; 1,86)
H	[1,38; 1,42)	W	[1,86; 1,90)
J	[1,42; 1,46)	X	[1,90; 1,94)
K	[1,46; 1,50)	Y	[1,94; 1,98)
L	[1,50; 1,54)	Z	[1,98; 2,04)
M	[1,54; 1,58)		

Así, para el DNI 3.822.031, el valor del polinomio sería:

$$P(38.220.310) = \frac{38.220.310}{99.999.999} + 1 = 1{,}3822\ldots$$

La letra que le correspondería es H.

Observamos que al ser x un número de 8 cifras, al dividirlo entre 99.999.999, obtendremos un número decimal comprendido entre 0,10 y 1,00.

Al sumarle 1, el resultado estará entre 1,10 y 2. Necesitamos hacer 23 intervalos, uno por cada letra. Para ello dividimos en intervalos de igual longitud ese conjunto de números:

$$\frac{2{,}00 - 1{,}10}{23} = 0{,}039\ldots \simeq 0{,}04$$

Por tanto, cada intervalo tiene como amplitud 0,04 (diferencia entre sus extremos).

Para calcular el dígito de control de la Seguridad Social podemos actuar de forma similar. Tomamos las 10 primeras cifras del número (sin tener en cuenta si la tercera cifra por la izquierda es 1 o 0) y calculamos su valor según el polinomio:

$$P(x) = \frac{x}{4.700.000.000}$$

El dígito de control estaría formado por las dos primeras cifras decimales del resultado.

Para el número 1.912.451.204:

$$P(1.912.451.204) = \frac{1.912.451.204}{4.700.000.000} = 0{,}4069045\ldots$$

En este caso, el dígito de control sería el número 40.

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Utilizando polinomios, calcula la letra que correspondería a estos números de DNI.*

23.456.785 *10.152.458*
4.589.632 *15.002.369*

b) *Escribe dos números de DNI que tengan la misma letra asociada al usar el cálculo con polinomios.*

c) *Determina todos los números de DNI que tengan asociada la letra K con dicho método.*

d) *Inventa un método propio para asignar a cada número de DNI una letra. Razona su funcionamiento.*

e) *Utilizando polinomios, calcula el dígito de control de los siguientes números.*

2315678580 *1615245870*
4508963233 *1500293695*

f) *Escribe dos grupos de 10 cifras que tengan el mismo dígito de control al usar polinomios.*

g) *Determina todos los grupos de números de 10 cifras que tengan asociado el dígito 61 con dicho método.*

h) *Inventa un método propio para calcular el dígito de control de un número de la Seguridad Social. Razona su funcionamiento.*

4 Ecuaciones de 1.^{er} y 2.^{o} grado

EN LA VIDA COTIDIANA... Animales veloces

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Conocer la velocidad que pueden alcanzar distintos animales. • Resolver problemas reales utilizando ecuaciones.

1 Animales terrestres

La velocidad de los animales depende en gran parte del medio en el que realizan sus desplazamientos.

Al igual que ocurre con los medios de transporte construidos por el hombre, los animales más rápidos son los que se desplazan por el aire, les siguen los que se desplazan por tierra y, después, los que lo hacen en el agua.

En la tabla siguiente aparecen las velocidades máximas que alcanzan algunos animales terrestres.

Animal	Velocidad
Antílope americano	97 km/h
Caballo	69 km/h
Cebra	65 km/h
Ciervo	78 km/h
Jirafa	58 km/h
Elefante	40 km/h
Galgo	67 km/h
Gorila	48 km/h
Guepardo	115 km/h
León	80 km/h

REALIZA LAS ACTIVIDADES, SUPONIENDO QUE LOS ANIMALES SE MUEVEN MEDIANTE LA ECUACIÓN: $\mathbf{e = v \cdot t}$

a) *Un guepardo está a 75 m de un antílope. En el mismo instante en que el guepardo comienza a perseguir al antílope, este emprende la huida.*

– *¿Qué ventaja lleva el antílope al cabo de 5 segundos?*

– *¿En qué distancia se reduce la ventaja del antílope cada segundo?*

– *¿Cuánto tiempo tarda el guepardo en alcanzarlo?*

b) *Un león comienza la persecución de una cebra cuando la distancia que los separa es de 200 metros. ¿Cuántos segundos tarda en alcanzarla? Haz un esquema y resuelve el problema.*

c) *Un león comienza a perseguir a una cebra que está a una distancia* d *(en m) de él. Expresa en función de* d *el tiempo que tarda en alcanzarla.*

d) *Un animal, separado* d *metros de otro, empieza a perseguirlo. Si sus velocidades son* v_1 *y* v_2 *km/h, respectivamente, expresa en función de* d, v_1 *y* v_2*, el tiempo que tarda en alcanzarlo y qué condiciones deben cumplirse para que lo logre.*

COMPETENCIA MATEMÁTICA

2 Animales del mar y el aire

Los animales del mar y el aire más rápidos alcanzan velocidades superiores a las de los animales que se desplazan por tierra.

En la siguiente tabla aparecen las velocidades máximas de algunos animales marinos y aves.

Animal	Velocidad
Orca	55 km/h
Delfín	64 km/h
Pez espada	90 km/h
Ballena azul	40 km/h
Águila real	300 km/h
Vencejo	200 km/h
Cisne	90 km/h
Pato	85 km/h

HAZ LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Expresa las velocidades de la ballena azul y del delfín en m/s, redondeando a las unidades, y utilízalas para responder al resto de actividades.*

b) *Un delfín y una ballena azul están separados entre sí 330 m. Si avanzan a su encuentro:*

– *¿Qué distancia los separa a los 10 s?*

– *¿En cuántos metros se reduce la distancia cada segundo?*

– *¿Cuánto tiempo tardan en encontrarse?*

c) *Si ambos avanzasen a su encuentro, y estuviesen a* d *metros de distancia, ¿cuánto tardarían en encontrarse?*

d) *Dos animales, separados entre sí una distancia* d *(en m), van uno al encuentro del otro. Si sus velocidades son* v_1 *y* v_2 *km/h, respectivamente, expresa en función de* d, v_1 *y* v_2 *el tiempo que tardan en encontrarse.*

e) *Halla las velocidades del águila real y del vencejo en m/s, redondeando a las unidades y utilízalas para responder al resto de actividades.*

f) *Un águila está a 810 m de un vencejo. Se dirige en línea recta hacia él sin que este, que va volando hacia ella a 80 km/h, se percate. A los 3 segundos, el vencejo se da cuenta y emprende la huida en dirección contraria a la velocidad máxima, persiguiéndolo el águila.*

– *¿A qué distancia está el águila cuando el vencejo se apercibe de que esta lo persigue?*

– *¿Cuánto disminuye la distancia entre ambos cada segundo en ese período?*

– *Cuando el vencejo huye, ¿cuánto disminuye la distancia cada segundo?*

– *¿Cuánto tiempo tarda el águila en alcanzarlo?*

g) *Determina el tiempo que tardaría un águila en alcanzar a un vencejo en un caso similar al anterior, si la distancia inicial fuera 500 m y el vencejo se apercibiera a los 5 segundos.*

h) *¿A qué distancia mínima tiene que estar un águila de un vencejo para que este, que se apercibe inmediatamente de ello y se halla a 100 m de la pared rocosa donde se refugia, logre salvarse?*

5 Sistemas de ecuaciones

EN LA VIDA COTIDIANA... Problemas matemáticos clásicos

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Conocer y resolver problemas matemáticos clásicos. • Resolver problemas utilizando ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

1 Problemas antiguos

Los sistemas de ecuaciones lineales se conocen y trabajan desde hace miles de años. Algunos fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales se referían a las incógnitas con palabras.

Los griegos resolvían algunos sistemas utilizando métodos geométricos, y los hindúes también trabajaron la resolución de sistemas.

Con la introducción de los símbolos en el Álgebra, a partir del siglo XVI, se desarrollan las técnicas de resolución actuales.

Algunos de los problemas que aquí se proponen tienen una gran tradición en Matemáticas. De algunos se sabe su origen, como el problema del enjambre, que es de procedencia hindú, y el del caballo y el mulo, que se atribuye a Euclides, pero de la mayoría no se sabe su fuente.

Los problemas de esta página y algunos de la página siguiente tienen la peculiaridad de que en su enunciado aparecen animales. Son problemas procedentes de sociedades rurales, en las cuales estos tenían una gran importancia.

Algunos de ellos se resuelven fácilmente mediante sistemas de ecuaciones, otros mediante una ecuación, mientras que, en algunos, al tratar de resolverlos mediante sistemas o ecuaciones, se alarga la resolución y resulta más sencillo hacerlo mentalmente.

RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS.

a) *Un pastor lleva a la feria su pequeño rebaño de ovejas que vende a tres feriantes: al primero le vende la mitad de las ovejas del rebaño, más media oveja; al segundo, la mitad de las ovejas que le quedan, más media oveja, y al tercero le vende la última oveja. ¿Cuántas ovejas tiene su rebaño? ¿Y cuántas ovejas vendió a cada feriante?*

b) *Los hindúes escribían muchos de sus problemas de una forma poética. El siguiente es uno de ellos. «De un enjambre de abejas, la quinta parte se posa sobre una flor de kadamba, la tercera parte sobre una flor de silinda. El triple de la diferencia entre ambos números vuela hacia las flores de un kutaja, y queda una abeja revoloteando en el aire, atraída al mismo tiempo por el embriagador aroma de un jazmín y de un pandanus. Dime, hermosa mujer, el número de abejas.»*

c) *Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sacos sobre sus lomos. Lamentábase el caballo de su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: «¿De qué te quejas? Si te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía». Decidme, doctos matemáticos, ¿cuántos sacos llevaba el camello y cuántos el mulo?*

d) *El siguiente problema se puede resolver también mentalmente, reflexionando sobre los datos. «Me encantan los animales. Tengo varios en casa. Todos son perros menos dos, todos son gatos menos dos y todos son loros menos dos. Es decir, que tengo… ¿cuántos animales?»*

e) *En un corral hay conejos y gallinas, que tienen un total de 60 cabezas y 192 patas. Halla el número de conejos y de gallinas. Antes de resolver el problema, contesta: ¿Podrían ser todos los animales conejos? ¿Y gallinas?*

2 Otros problemas clásicos

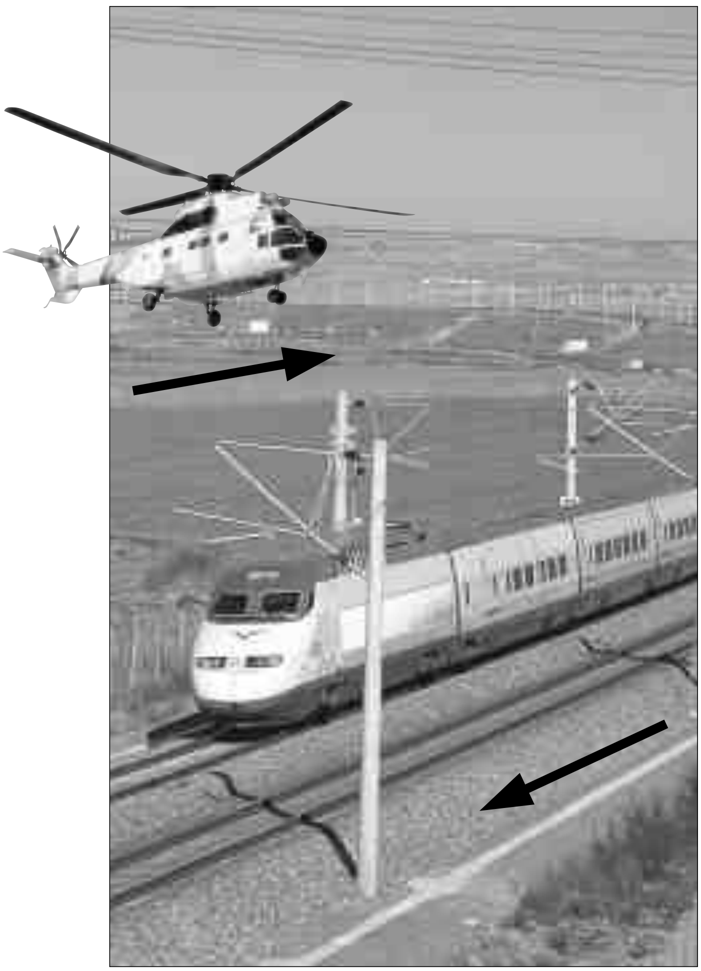
A continuación tienes otros problemas, no tan antiguos, pero sí muy comunes, que se suelen plantear como acertijos. Resuélvelos.

RESUELVE LOS PROBLEMAS.

a) *Un tren sale a las 8 horas de la mañana de una ciudad A con destino a otra ciudad B. Su velocidad media durante el recorrido es de 80 km/h. Un helicóptero parte a la misma hora de la ciudad B, sobrevolando la vía férrea, al encuentro del tren. Su velocidad media es de 400 km/h.*

En el mismo instante en que se encuentran, el helicóptero vuelve a la ciudad B. Al llegar a esta cambia de rumbo y se dirige otra vez hacia el tren. Cuando lo encuentra, da la vuelta y regresa a la ciudad, y así sucesivamente.

Sabiendo que la distancia entre ambas ciudades es de 320 km, y suponiendo que el helicóptero no pierde velocidad en los cambios de dirección, ¿cuántos kilómetros recorre el helicóptero?



b) *Un elefante macho y un elefante hembra pesan en total 15.500 kg. La hembra y una cría, a su vez, pesan 9.500 kg, mientras que el macho y la cría pesan juntos 10.000 kg. ¿Cuánto pesan los tres juntos? ¿Y cuánto pesa cada uno?*

c) *La señora O'Toole, una persona decididamente ahorradora, está tratando de pesarse ella, su bebé y su perro, todo por un centavo. Al subir a la báscula, esta marca 170 libras. Si ella pesa 100 libras más que el peso combinado del perro y el bebé, y el perro pesa el cuarenta por ciento del peso del bebé, ¿puede determinar usted el peso del pequeño querubín? (Acertijo de Sam Loyd.)*

d) *Una etapa de una vuelta ciclista de 180 km fue recorrida por el vencedor a una velocidad media de 40 km/h. La segunda etapa de la vuelta también era de 180 km, pero tenía un puerto de primera categoría en la mitad de su recorrido. El vencedor de esta etapa subió la primera mitad de la etapa a una velocidad media de 20 km/h, y desde el puerto a la meta avanzó a 60 km/h. ¿En cuál de las dos etapas invirtió más tiempo el vencedor?*

e) *¿Cuánto cuestan siete sardinas y media a real y medio la sardina y media?*

f) *Un ganadero tiene pienso para alimentar a una vaca durante 27 días, y si fuera una oveja, tendría para 54 días. ¿Para cuánto tiempo tendría pienso si tuviera que alimentar a la vaca y la oveja?*

6 Proporcionalidad numérica

EN LA VIDA COTIDIANA... Los impuestos

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Calcular porcentajes sucesivos. • Comprender los conceptos básicos que intervienen en el IVA y en la declaración de la renta de las personas físicas: rentas, retenciones y desgravaciones. • Estudiar un ejemplo práctico de cálculo del IVA y de la base imponible de una declaración de la renta.

1 El IVA y su proceso de cálculo

El IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido) es un impuesto indirecto que incide sobre el consumo y se abona en la realización de transacciones, entrega de bienes y prestaciones de servicios, realizadas en el desarrollo de una actividad empresarial o profesional.

El IVA actúa cargando un porcentaje sobre el precio de cada producto. Este porcentaje varía en función del producto del que se trate. Así, los productos de primera necesidad llevan un IVA muy reducido (4 %) o reducido (7 %), y los demás llevan un IVA superior, un 16 %.

Desde la materia prima hasta el consumidor, un producto va pasando por diferentes personas, cada una de las cuales, por su trabajo, sube de precio ese producto; es por ese valor añadido por el que debe pagar un porcentaje: el IVA a Hacienda.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Un fabricante elabora un producto que vende a un almacenista por 240 €. El almacenista paga al fabricante un 7 % de IVA. Después, el almacenista vende el producto a una tienda por valor de 300 €. El dueño de la tienda paga al almacenista un 7 % de IVA.

El dueño de la tienda vende el mismo producto al público en 390 € más el 7 % de IVA. ¿Cuánto paga de IVA cada uno? ¿Cuánto suman todo el IVA?

CONTESTA A LAS PREGUNTAS COMPLETANDO LOS RECUADROS.

a) *¿Qué cantidad de IVA cobra y tiene que ingresar a Hacienda el fabricante?*

Es el ☐ *% de* ☐ € = ☐ €

b) *¿Qué cantidad de IVA cobra y qué cantidad ha de ingresar a Hacienda el almacenista?*

- *Calcula el IVA que cobra:*

  Es el ☐ *% de* ☐ € = ☐ €

- *El almacenista paga la diferencia entre lo que él ha cobrado de IVA y lo que pagó por IVA al fabricante:*

  ☐ − ☐ = ☐ €

c) *¿Qué cantidad de IVA cobra y qué cantidad ha de ingresar el dueño de la tienda?*

- *Calcula el IVA que cobra:*

  Es el ☐ *% de* ☐ € = ☐ €

- *El dueño de la tienda paga a Hacienda la diferencia entre lo que él cobra de IVA y lo que pagó de IVA al almacenista:*

  ☐ − ☐ = ☐ €

d) *¿Cuánto le cuesta al comprador el producto?*

☐ + ☐ = ☐ €

PVP IVA Total

e) *Comprueba que lo que paga el consumidor final de IVA coincide con la suma de lo que han pagado por ese concepto las tres personas que han intervenido en el proceso.*

☐ = ☐ + ☐ + ☐

IVA final | IVA fabricante | IVA almacenista | IVA tienda

COMPETENCIA MATEMÁTICA

2 La declaración de la renta

Además de los impuestos indirectos como el IVA, hay otros tipos de impuestos, denominados directos, como el Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas (IRPF), el Impuesto sobre Patrimonio, etc.

El IRPF es un impuesto directo que paga la mayoría de las personas que obtienen ingresos en concepto de:

– Rentas del trabajo.
– Rentas del capital mobiliario.
– Rentas del capital inmobiliario.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que en la declaración, que se suele hacer durante los meses de mayo-junio, se han de reflejar las rentas correspondientes al año anterior y que previamente se efectúan retenciones a cuenta sobre lo que uno ha de pagar. Además, hay también deducciones familiares, pagos a la Seguridad Social, etc.

Vamos a trabajar con un ejemplo muy sencillo de declaración de la renta, con los siguientes datos ficticios. Completa los campos según el orden indicado y determina si al señor Pérez le devolverán o tendrá que pagar a Hacienda por este impuesto.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

El señor Pérez, casado y con dos hijos, tuvo como sueldo bruto, correspondiente al año 2006, 21.000 € con las siguientes características.

– Retenciones a cuenta: 14 % del total.
– Cotización a la Seguridad Social: 1.068 €.
– Gastos deducibles del trabajo: 5 %.

- Rendimientos de las rentas mobiliarias (cuenta corriente): 480 €.
  – Retención: 18 %.
  – Gasto de administración deducible: 12 €.
- Otras deducciones:
  – Por dos hijos: 180 €/hijo.
  – 162 € por rendimiento del trabajo dependiente.

1.º Calculamos, en primer lugar, el rendimiento neto de las rentas del trabajo:

$\square$	$-$	$\square$	$-$	$\square$	$=$	$\square$
Renta trabajo		Seg. Social		Gasto deducible del trabajo		Rendimiento neto del trabajo

2.º Hacemos lo mismo con la renta mobiliaria:

$\square$	$-$	$\square$	$=$	$\square$
Renta mobiliaria		Gasto administración		Rendimiento neto mobiliario

3.º La base imponible será la suma de los rendimientos netos del trabajo y mobiliario:

$\square$	$+$	$\square$	$=$	$\square$
R. neto trabajo		R. neto mobiliario		Base imponible

4.º A esta base se le aplica una escala de gravamen. Para simplificar vamos a suponer que es el 18,7 % de la base; por tanto, la cuota íntegra es:

18,7 % de $\square = \square$ €

5.º Calculamos el total de deducciones:

$\square$	$+$	$\square$	$=$	$\square$
Por hijos		Por trabajo dependiente		Total

6.º La cuota líquida se calcula así:

$\square$	$-$	$\square$	$=$	$\square$
Cuota íntegra		Deducciones		Cuota líquida

7.º La cuota diferencial (CD) es igual a la cuota líquida menos las retenciones a cuenta:

$\square$	$-$	$\square$	$-$	$\square$	$=$	$\square$
Cuota líquida		Retención trabajo		Retención mobiliario		Cuota diferencial

8.º Resultado final:

a) Si CD < 0, sale a devolver $\square$ €

b) Si CD > 0, sale a pagar $\begin{cases} \text{Junio: 60 \%} \ \square \text{ €} \\ \text{Nov.: 40 \%} \ \square \text{ €} \end{cases}$

7 Progresiones

EN LA VIDA COTIDIANA... Interés simple e interés compuesto

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Relacionar el interés simple con las progresiones aritméticas. • Reconocer la diferencia entre interés simple y compuesto. • Relacionar el interés compuesto con las progresiones geométricas.

1 El interés simple y las progresiones aritméticas

El valor del dinero varía con el tiempo. Una barra de pan no cuesta lo mismo ahora que hace cinco años. Por eso, cuando alguien lleva su dinero a un banco y lo invierte durante un cierto tiempo, espera que el banco le devuelva el dinero invertido más otra cantidad, los beneficios de su inversión, que normalmente se denominan intereses.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Clara va a invertir en un depósito financiero 6.000 € a un interés del 5 % anual durante 3 años. Los intereses producidos cada año los ingresará en una cuenta corriente. ¿Qué intereses habrá obtenido en total al final de esos 3 años?

Los elementos que intervienen en una operación de interés simple (en el que los beneficios obtenidos al final de cada período de tiempo no se reinvierten) son:

C = Capital invertido (6.000 €)
t = Plazo de inversión (3 años)
i = Interés simple (lo que queremos calcular)
r = Rédito (5 % anual)

Un rédito (también llamado interés, pero que no se refiere a los beneficios) del 5 % anual nos indica que por 100 € de inversión obtenemos en un año 5 € de beneficio, es decir, por 1 € obtendremos 0,05 € al final de año.

El interés producido en el primer año es:

$$6.000 \cdot 0{,}05 = 300 \text{ €}$$

El segundo año se producen otros 300 €, ya que los intereses del primer año no se reinvierten, luego al final del segundo año tendremos: 300 + 300 = 600 € de intereses.

Al final del tercer año tendremos: $3 \cdot 300 = 900$ €.

El capital total, al final del tercer año, es:

$$6.000 + 3 \cdot 300 = 6.900 \text{ €}$$

Observa que los capitales totales al final de los años sucesivos: 6.300, 6.600 y 6.900, siguen una progresión aritmética de razón 300.

En general, el interés simple se calcula mediante esta fórmula (siendo r el tanto por ciento anual):

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{C \cdot r \cdot t}}{\mathbf{100}} \text{ (tiempo en años)}$$

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{C \cdot r \cdot t}}{\mathbf{12 \cdot 100}} = \frac{\boldsymbol{C \cdot r \cdot t}}{\mathbf{1.200}} \text{ (tiempo en meses)}$$

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{C \cdot r \cdot t}}{\mathbf{360 \cdot 100}} = \frac{\boldsymbol{C \cdot r \cdot t}}{\mathbf{36.000}} \text{ (tiempo en días)}$$

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Si Clara hubiese invertido 10.000 € al 3 % anual durante 5 años, ¿qué capital total habría obtenido al final de esos 5 años?*

b) *¿Cuál sería entonces la diferencia de la progresión aritmética formada por los capitales totales al final de cada año?*

c) *Para una inversión de un capital* C, *a un rédito* r *durante* t *años, escribe la sucesión formada por los capitales totales al final del año 1, del año 2, del año 3, …, del año* t.

d) *¿Qué tipo de progresión forman esos capitales totales? ¿Cuál es la diferencia?*

COMPETENCIA MATEMÁTICA

2 El interés compuesto y las progresiones geométricas

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

¿Qué capital total habría obtenido Clara con la inversión anterior si no hubiese retirado los intereses obtenidos al final de cada año?

Estamos ante una situación de interés compuesto, ya que los intereses producidos al final de cada período de tiempo no se retiran, sino que se añaden al capital y se vuelven a reinvertir.

El primer año, la ganancia que obtiene es la misma que si el capital está depositado a un interés simple:

$$6.000 \cdot 0{,}05 = 300 \text{ €}$$

Al final del primer año, el interés es de 300 €, pero como los 300 € no se retiran, el capital al comenzar el segundo año es:

$$6.000 \cdot (1 + 0{,}05) = 6.000 + 300 = 6.300 \text{ €}$$

El interés producido en el segundo año es:

$$6.300 \cdot 0{,}05 = 315 \text{ €}$$

El capital, al final del segundo año, es:

$$6.000 \cdot (1 + 0{,}05)^2 = 6.300 + 315 = 6.615 \text{ €}$$

Comprueba tú mismo que, al final del tercer año, el capital total obtenido es:

$$6.000 \cdot (1 + 0{,}05)^3 = 6.615 + 330{,}75 = 6.945{,}75 \text{ €}$$

En este caso, los capitales al final de cada año: 6.300, 6.615 y 6.945,75 siguen una progresión geométrica de razón 1,05.

$$1 + 0{,}05 = 1 + \frac{r}{100}$$

En general, para las inversiones a interés compuesto, el capital final C_f que se obtiene a partir de un capital C, con un rédito r, en un tiempo t, es:

$$\boldsymbol{C_f = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t}$$

Esta fórmula es válida para cualquier período (años, meses o días). Basta con sustituir r por el tanto por ciento de rédito en ese período y t por el número de años, meses o días que se invierte.

REALIZA ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Para una inversión de un capital* C*, a un rédito* r *durante un tiempo* t*, escribe la sucesión formada por los capitales totales cuando* t = *1,* t = *2, etc.*

b) *¿Qué tipo de progresión forman? ¿Cuál es la razón de esta progresión?*

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Luisa se asocia a una cooperativa de viviendas. Dentro de 2 años tiene que pagar 5.000 €. ¿Cuánto debe invertir en un depósito al 2 % de interés mensual compuesto para obtener 5.000 €?

El período de capitalización es de un mes, luego debemos utilizar la fórmula $C_f = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$, siendo C el capital que queremos hallar, C_f el capital final: 5.000 €, y r el tanto por ciento mensual.

Por tanto, podemos aplicar la fórmula así:

$$5.000 = C\left(1 + \frac{2}{100}\right)^{24} \rightarrow 5.000 = C \cdot (1 + 0{,}02)^{24}$$

Con la calculadora hallamos:

$$5.000 = C \cdot 1{,}608 \rightarrow C = 3.109{,}45 \text{ €}$$

Luisa debería invertir 3.109,45 €.

HAZ LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Calcula el capital que, invertido a un interés simple del 5 %, produce 1.500 € de intereses en 4 años.*

b) *¿Durante cuánto tiempo tiene que estar invertido un capital a un interés simple del 4 % para que se triplique?*

c) *Determina el capital que, invertido a un interés compuesto del 5 %, produce 1.500 € de intereses en 4 años.*

d) *Halla el capital que, invertido a un interés compuesto del 1,5 % mensual, produce en 3 años unos intereses de 3.000 €.*

8 Figuras planas. Áreas

EN LA VIDA COTIDIANA... Áreas de polígonos con medidas de longitud

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Calcular el área de un triángulo conociendo las medidas de sus lados. • Aplicar ese procedimiento para calcular áreas de recintos cuadrangulares. • Conocer y aplicar procedimientos aproximados para hallar el área de cuadriláteros y triángulos.

1 Fórmula de Herón

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Ana es arquitecta y ha recibido el plano de una parcela triangular donde debe construir un edificio. En el plano aparecen solo las longitudes de los tres lados. ¿Cómo puede calcular el área de la parcela?

Existe una fórmula para calcular con exactitud el área de un triángulo si conocemos las tres longitudes de sus lados, sin tener que determinar la altura.

Esa fórmula es la llamada fórmula de Herón, que fue un pensador que vivió en el siglo I d.C.

Si tenemos un triángulo de lados a, b y c, siendo p el semiperímetro o mitad del perímetro: $p = (a + b + c)/2$.

El área del triángulo se puede calcular así:

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Comprueba que la fórmula es correcta con un triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 8 cm. Para ello, calcula su área con la fórmula que ya conocías y con la fórmula de Herón. Compara ambos resultados.*

b) *Halla, con la fórmula de Herón, el área de un triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 6 cm.*

c) *Dibuja el triángulo de la actividad anterior y mide una de sus alturas. Calcula su área y compara el resultado con el que habías obtenido. Ten en cuenta que puede haber algunas variaciones debido a las aproximaciones de la raíz y a la precisión con que midas la altura.*

2 Cálculo del área de un cuadrilátero mediante la fórmula de Herón

Para calcular el área de un polígono cualquiera podemos descomponerlo en triángulos y hallar sus áreas. El área de ese polígono será la suma de las áreas de los triángulos.

Ahora bien, en el apartado anterior hemos aprendido a calcular el área de un triángulo conociendo solo sus lados. Podemos aplicar, por tanto, la fórmula de Herón al cálculo de áreas de cuadriláteros (en realidad, de cualquier polígono): para ello bastará con dividir el cuadrilátero en dos triángulos mediante una diagonal y medir la longitud de esta. Después, se aplica la fórmula de Herón a ambos triángulos y se hallan sus áreas.

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Dibuja en tu cuaderno un cuadrilátero y triangúlalo. Mide los lados de cada uno de los dos triángulos que resultan y halla su área con la fórmula de Herón. Después, suma ambas áreas.*

b) *Traza, en el cuadrilátero original, la diagonal distinta a la anterior. Repite el proceso y calcula el área del cuadrilátero. ¿Obtienes el mismo resultado que antes? ¿Deberías obtenerlo? ¿A qué crees que se debe la diferencia?*

3 Medidas aproximadas en un cuadrilátero: una fórmula brasileña

Los campesinos del norte de Brasil utilizan un método para calcular de forma aproximada la superficie de terrenos con forma de cuadrilátero.

En primer lugar, miden las longitudes de los lados, luego hallan la semisuma de cada par de lados opuestos y multiplican ambas semisumas. En el caso de un cuadrilátero de lados a, b, c y d, con a y c opuestos, su área será:

$$\boldsymbol{A = \left(\frac{a + c}{2}\right) \cdot \left(\frac{b + d}{2}\right) = \frac{(a + c) \cdot (b + d)}{4}}$$

Consideremos un caso sencillo. Supongamos que tenemos que calcular el área de un campo rectangular de base 20 m y altura 10 m.

El área, calculada con la fórmula usual, es:

$$A = 20 \cdot 10 = 200 \text{ m}^2$$

Si la calculamos como los campesinos brasileños, tenemos que:

$$A = \frac{(a + c) \cdot (b + d)}{4} = \frac{(20 + 20) \cdot (10 + 10)}{4} = 200$$

Por tanto, vemos que el resultado es el mismo.

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Aplica la fórmula brasileña a un cuadrado cualquiera. ¿Es un buen método?*

b) *Aplícala a un rectángulo y un rombo cualesquiera. ¿Resulta un método adecuado?*

c) *Utiliza la fórmula para calcular el área de un trapecio de bases 12 m y 8 m y altura 5 m. Compárala con el área obtenida con la fórmula usual. ¿Es una aproximación correcta?*

4 Medidas aproximadas en un triángulo: una fórmula brasileña

Los campesinos brasileños calculan también el área de una superficie triangular con la fórmula de los cuadriláteros del apartado anterior. Para ello, suponen que uno de los lados del cuadrilátero es igual a cero.

Así, dado un triángulo de lados a, b y c, para hallar el área A se multiplica la mitad de uno de ellos por la semisuma de los otros dos. Es decir:

$$\boldsymbol{A = \frac{(a + b)}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{(a + b) \cdot c}{4}}$$

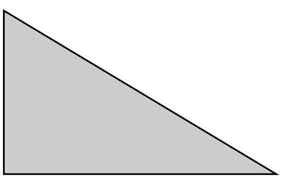
REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Aplica la fórmula anterior a un triángulo equilátero cualquiera. ¿Es un método adecuado?*

b) *¿Y si la aplicas a un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm, respectivamente?*

c) *¿Y si la utilizas con un triángulo isósceles con lados iguales de longitud 6 cm y lado desigual de 8 cm?*

d) *Aplica esa fórmula en el triángulo de la figura, midiendo sus lados. Compara el resultado con el obtenido al aplicar la fórmula de Herón (que es exacta). ¿Es una buena aproximación el método brasileño?*



Observa que en la fórmula anterior puedes cambiar el nombre de los tres lados y obtendríamos la fórmula:

$$\boldsymbol{A = \frac{(a + c)}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{(a + c) \cdot b}{4}}$$

y también:

$$\boldsymbol{A = \frac{(c + b)}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{(c + b) \cdot a}{4}}$$

¿Cuál de las fórmulas anteriores es más adecuada?

Comprueba, para cada uno de los triángulos de las actividades a), b), c) y d), cuál de las fórmulas ofrece una mejor aproximación al resultado real. ¿Qué observas? ¿Cuál es la aproximación más conveniente?

RECURSOS PARA EL AULA

COMPETENCIA MATEMÁTICA

9 Cuerpos geométricos

EN LA VIDA COTIDIANA... Construcciones cúbicas

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

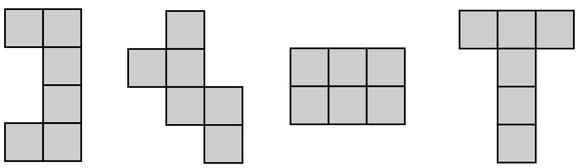
• Encontrar y reconocer diferentes desarrollos del cubo. • Dividir un cubo en partes iguales • Aplicar esa división en la construcción de un cubo con piezas iguales. • Construir un puzle con cubitos.

1 Desarrollos de un cubo: hexaminós

Los poliedros se pueden construir a partir de recortables de papel o cartulina, doblándolos por las aristas y pegando después. Esos «recortables» son los desarrollos planos de los mismos.

El desarrollo plano del cubo estará formado por una figura plana compuesta por seis cuadrados iguales, unidos por lados completos, lo que se llama un hexaminó. Ahora bien, si partimos de un hexaminó cualquiera, unas veces se puede construir un cubo a partir de él y otras veces no.

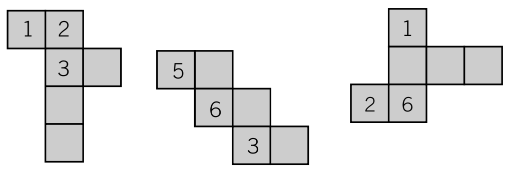
A continuación tienes varios hexaminós. *¿Con cuáles podemos formar un cubo?* Intenta determinarlo mentalmente. Si tienes problemas, constrúyelos en papel y trata de formar un cubo a partir de ellos.



REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Busca todos los hexaminós que permiten construir un cubo: son exactamente 11. Para que no olvides ninguno te damos dos formas de hallarlos. La primera es ir doblándolos por los lados hasta conseguir el cubo. La segunda es obtener el desarrollo del cubo, poniéndolo a rodar sobre el papel, y marcando las caras hasta que todas lo toquen.*

b) *Los dados que se utilizan en muchos juegos tienen los números del 1 al 6, colocados de manera que la suma de los puntos de cada par de caras opuestas es siempre 7. A continuación tienes los desarrollos de varios de estos dados. Complétalos.*



2 Puzle de fichas iguales a partir de un cubo

Queremos hacer puzles para construir un cubo en los que las fichas sean iguales. Empezaremos con un caso fácil y luego lo iremos complicando. Piensa que construir un cubo con tres piezas iguales es lo mismo que dividirlo en tres partes iguales. Lo más adecuado sería que sostuvieras un cubo en la mano para, además de imaginar, poder manipularlo.

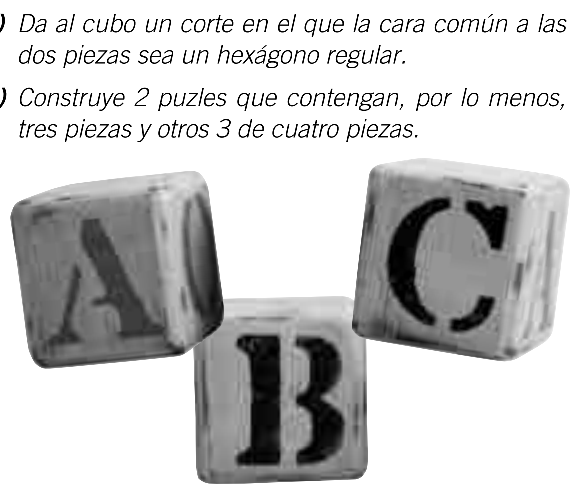
HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Construye un puzle de dos piezas (es decir, divide el cubo en dos partes iguales). Hazlo de tres formas diferentes.*

b) *Seguramente el corte que has hecho antes para dividir el cubo sea plano. Si es así, haz otros dos cortes que no sean planos.*

c) *Da al cubo un corte en el que la cara común a las dos piezas sea un hexágono regular.*

d) *Construye 2 puzles que contengan, por lo menos, tres piezas y otros 3 de cuatro piezas.*



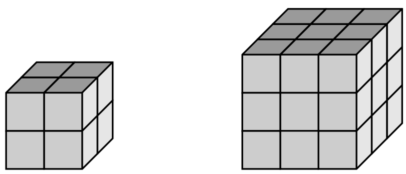
3 Construcciones con cubitos iguales

Imagina que tenemos un montón de cubitos iguales. Nuestro objetivo en este apartado va a ser reflexionar sobre lo que ocurre cuando apilamos esos cubitos y formamos otros cubos mayores.

Llamamos lado del cubo grande al número de cubitos que tiene en cada arista.

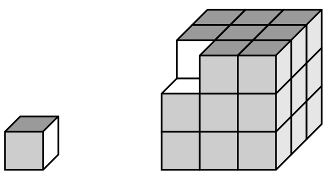
REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Observa en la figura que necesitamos 8 cubitos iguales para obtener un cubo de lado 2 ($2 \times 2 \times 2$), y 27 cubitos para lograr uno de lado 3 ($3 \times 3 \times 3$).*



¿Cuántos cubitos necesitamos para construir un cubo de lado 4? ¿Y uno de lado 5? ¿Y otro de lado n*?*

b) *Construimos un cubo de lado 3 apilando 27 cubitos. Luego pintamos sus caras exteriores.*



- *¿Cuántos cubitos pequeños tienen pintada una sola cara? ¿Y dos caras? ¿Y tres?*
- *¿Habrá alguno con más de tres caras pintadas? ¿Y sin ninguna cara pintada?*
- *Para ver si has respondido bien a las preguntas anteriores, comprueba que la suma de tus respuestas es igual a 27.*

c) *Pintamos ahora las caras en un cubo de lado 4. Responde a las mismas preguntas que en el apartado anterior. ¿Cuál será la suma?*

d) *Repite el proceso para un cubo de lado 5.*

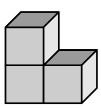
e) *Intenta generalizar para el caso de un cubo de* n *cubitos de lado. Contesta a las mismas preguntas.*

f) *Imagina que tenemos un cubo de 1 m de arista subdividido en cubitos más pequeños, de 1 cm de lado cada uno.*

- *Si colocamos todos esos cubitos, uno sobre otro, formando una columna, ¿qué altura tendrá el poliedro que se forma?*
- *¿Cuál será su área? ¿Y su volumen? ¿Coinciden con los del cubo mayor?*
- *Imagina que pintamos todas las caras del poliedro formado al poner los cubitos en columna. ¿Cuántos cubitos tienen dos caras pintadas? ¿Y tres? ¿Y cuatro? ¿Y cinco?*

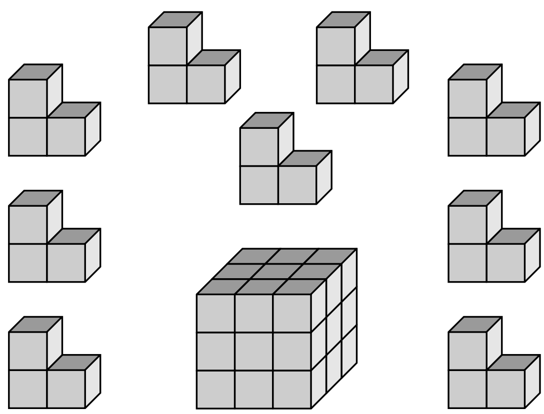
4 Cubo de O'Berine

El cubo de O'Berine es un puzle para construir un cubo de lado 3 a partir de fichas formadas por cubitos más pequeños. Hacemos 9 fichas iguales de 3 cubos cada una, pegándolos en forma de *L* y uniendo los cubos por una cara completa, como se ve en la figura.



El objetivo del puzle (llamado de O'Berine por el nombre de su inventor) es construir con esas 9 fichas un cubo de 3 cubitos de lado ($27 = 9 \cdot 3$).

Construye tú mismo el cubo de O'Berine.



10 Movimientos y semejanzas

EN LA VIDA COTIDIANA... Publicidad y movimientos

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Descubrir la Geometría en contextos reales. • Reconocer simetrías de diferentes tipos en anagramas o logotipos. • Valorar la importancia de la Geometría en la publicidad. • Diseñar un logotipo geométrico.

1 Logotipos geométricos

Cada compañía comercial o empresa, así como los organismos públicos y privados, poseen un logotipo, una figura o símbolo gráfico que sirve para identificarlos.

El logotipo tiene gran importancia porque constituye la primera relación con la empresa u organismo al que representa. Por eso, se destina mucho tiempo, esfuerzo y dinero a diseñar los logotipos.

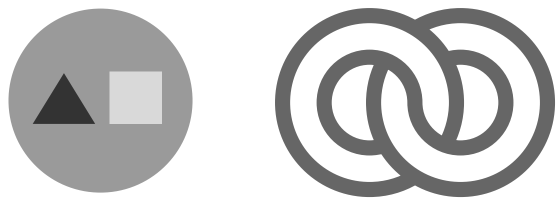
Seguro que si dedicas un poco de tiempo a observar logotipos (cuando vayas por la calle, en la prensa o revistas, en la televisión, en los folletos de publicidad…), te darás cuenta de que en ellos hay numerosos elementos geométricos.

Puedes encontrar círculos o circunferencias, triángulos, cuadrados, pentágonos, figuras circulares…

A continuación, ves dos ejemplos de logotipos en los que destaca la presencia de elementos geométricos.

Estos logotipos pertenecen a la CAM (Caja de Ahorros del Mediterráneo) y a la Fundación ONCE.

En el primero aparece un círculo y, dentro de él, un triángulo y un cuadrado. El segundo consta de unas circunferencias entrelazadas entre sí.



Piensa que si en los logotipos aparecen con gran frecuencia motivos geométricos, es porque resultan atractivos visualmente. Son, además, una manera de valorar la Geometría.

2 Logotipos simétricos

En este apartado vamos a trabajar con logotipos que, además de tener elementos geométricos, sean figuras simétricas, bien respecto a un eje o con una simetría central respecto a un punto.

Observa tres logotipos de marcas de coches, correspondientes a Volkswagen, Mercedes Benz y Opel.

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Considera el logotipo de Volkswagen. ¿Tiene alguna simetría central respecto a un punto?*

b) *¿Es simétrico respecto a algún eje? Señala todos los ejes de simetría que encuentres.*

c) *Observa el logotipo de Mercedes. ¿Es simétrico respecto a algún punto?*

d) *El logotipo de Mercedes, ¿tiene algún eje de simetría? ¿Cuántos de estos ejes puedes encontrar?*

e) *Considera ahora el logotipo de Opel. ¿Tiene simetría respecto a algún punto?*

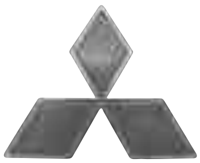
f) *¿Existe algún eje de simetría en el logotipo de Opel? Señala todos los que encuentres.*

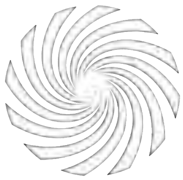
g) *Diseña algún logotipo que tenga simetría respecto a un punto.*

h) *Diseña dos logotipos que tengan dos y tres ejes de simetría, respectivamente.*

3 Logotipos con giros

Vamos a considerar logotipos que se puedan obtener girando una figura dada. Observa los logotipos de Mitsubishi (una empresa automovilística) y de Media Markt (una cadena de tiendas).





HAZ LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Observa el logotipo de Mitsubishi. ¿De cuántas figuras está compuesto?*

b) *¿Qué ángulos debemos girar cada una de las figuras que lo componen para superponerla sobre las otras dos? ¿Cuáles son los centros de esos giros?*

c) *Dibuja el nuevo logotipo que se obtendría si girásemos una de las figuras que componen el logotipo actual 60°, 120°, 180°, 240° y 300°.*

d) *Señala todas las simetrías que aprecies en el logotipo de Mitsubishi.*

e) *Considera el logotipo de Media Markt. Está formado por un círculo y una figura que se repite. ¿Cuántas veces se repite esa figura?*

f) *¿Cuántos grados tienes que girar cada figura para obtener la siguiente? ¿Cuál es el centro de giro?*

g) *Dibuja el logotipo que se obtendría si girásemos la figura base 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° y 315°.*

h) *Busca otros ejemplos y señala cuál es la figura a partir de la cual se puede obtener todo el logotipo.*

4 Movimientos y algo más

A veces, además de los movimientos, en los logotipos hay elementos que, al menos a primera vista, no se aprecian, pero que están presentes.

Observa el logotipo del Banco Zaragozano. Si te fijas en la forma que tiene la Z inicial del banco, verás que es el símbolo del porcentaje % estilizado.

Ese motivo no se aprecia a primera vista pero sí de manera inconsciente. Con el logotipo, el banco transmite la idea de que nuestros ahorros se van a incrementar y, al ser la primera inicial de su nombre, se recuerda fácilmente.

Veamos otros dos ejemplos de logotipos de entidades relacionadas con las finanzas: Deutsche Bank e Iberagentes.

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *¿Qué motivo ves en cada logotipo que representa un significado positivo para una entidad financiera?*

b) *Analiza los giros y simetrías centrales que hay en cada uno de los tres logotipos.*

c) *Diseña un logotipo que transmita un determinado mensaje para un tipo de empresa.*

5 Diseña tu propio logotipo

A lo largo de los anteriores apartados de este proyecto has analizado bastantes logotipos, descubriendo la importancia de la Geometría en su diseño.

Seguro que algunos logotipos te han gustado más que otros y se te han ocurrido algunas ideas sobre la mejor manera de diseñar un logotipo.

Busca un motivo para hacerlo (una excursión de tu curso o clase, las fiestas de tu barrio o localidad...) y diseña un logotipo. Este debe tener elementos geométricos y, si es posible, han de aparecer los movimientos que hemos visto.

11 Funciones

EN LA VIDA COTIDIANA... Los movimientos y las gráficas

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Interpretar las gráficas espacio-tiempo y velocidad-tiempo, que relacionan el espacio o la velocidad de un móvil en función del tiempo transcurrido. • Relacionar estos dos tipos de gráficas.
• Diseñar una gráfica a partir de un dibujo.

1 Interpretación de las gráficas espacio-tiempo

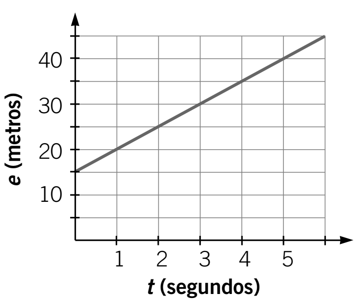
En primer lugar conviene que recordemos que la velocidad de un móvil es la magnitud que relaciona el espacio que recorre con el tiempo empleado en ello.

Hay dos tipos de gráficas para analizar los movimientos: la gráfica espacio-tiempo y la gráfica velocidad-tiempo.

En ambas representamos, en el eje horizontal, el tiempo como variable independiente, y en el eje vertical, el espacio recorrido o la velocidad, respectivamente.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Un móvil parte de un punto con un movimiento uniforme (a velocidad constante) que viene representado por la siguiente gráfica.



HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *¿A qué distancia inicial se encontraba el móvil?*

b) *¿Cuál es la velocidad del móvil? ¿Cómo será la gráfica velocidad-tiempo?*

c) *Escribe la expresión algebraica del movimiento.*

Para responder a las preguntas anteriores, ten en cuenta que:

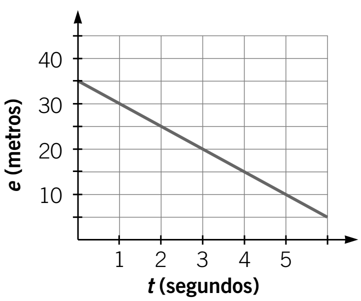
a) *La distancia inicial corresponderá a un valor del tiempo* $t = 0$*, que según la gráfica es igual a…*

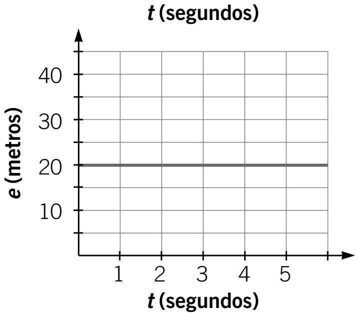
b) *Esta es una gráfica espacio-tiempo, y la velocidad que relaciona ambas magnitudes es de la forma:* $v = \frac{e}{t}$*. Como vemos, en 1 segundo el móvil ha pasado de estar a 15 metros a estar a 20 metros, por lo que ha recorrido 5 metros. En 2 segundos pasa de 15 a 25 metros y ha recorrido 10 metros, etcétera. Por tanto, su velocidad es…*

Representa la gráfica velocidad-tiempo. ¿Qué forma tiene?

c) *La expresión algebraica del movimiento indica el espacio que recorre el móvil en función del tiempo. En este caso, hay un espacio inicial, y luego el espacio es directamente proporcional al tiempo empleado. La expresión es…*

Observa estas gráficas de movimientos y contesta a los apartados a), b) y c) formulados para la gráfica anterior.



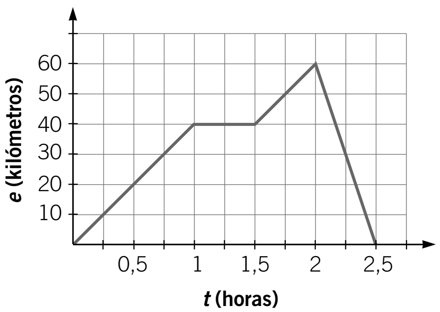


2 Análisis de las gráficas espacio-tiempo y velocidad-tiempo

En este apartado vamos a analizar las gráficas espacio-tiempo y a calcular la velocidad del móvil en cada tramo. También representaremos la gráfica velocidad-tiempo.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Dada esta gráfica espacio-tiempo, calcula la velocidad en cada tramo y representa la gráfica velocidad-tiempo correspondiente.



Algunas observaciones importantes son:

- En la gráfica hay cuatro tramos que se corresponderán con cuatro velocidades diferentes.
- La forma de la gráfica espacio-tiempo no tiene relación con el movimiento real del móvil, que se supone rectilíneo. No debemos confundir la gráfica de un movimiento con el movimiento real.

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Describe la situación del móvil en cada uno de los tramos. ¿Se encuentra más lejos o cerca del punto de partida?*

b) *En una hora, ¿qué espacio ha recorrido? ¿Y en una hora y media?*

c) *La velocidad del móvil es constante, pero no todo el tiempo, sino en cada tramo. ¿Cuál es la velocidad del móvil en cada tramo?*

d) *Escribe la expresión algebraica del movimiento en los cuatro tramos.*

e) *Representa la gráfica velocidad-tiempo. ¿Qué forma tiene?*

f) *Compara la forma de la gráfica velocidad-tiempo con la forma de la gráfica espacio-tiempo.*

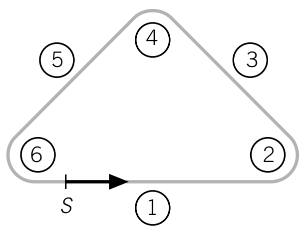
g) *Indica los máximos y mínimos de la gráfica velocidad-tiempo.*

RECURSOS PARA EL AULA

3 Diseño de gráficas a partir de dibujos

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Observa el circuito de carreras de la figura: los coches salen del punto *S* y van siempre a la máxima velocidad posible.



Ten en cuenta que, al llegar a una curva, se frena, y al salir, se acelera.

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *¿Cómo varía la velocidad del coche en función de su posición en el circuito?*

b) *Representa gráficamente la velocidad del coche en función del tiempo.*

c) *En el supuesto de un circuito circular de 100 m de radio y una velocidad constante de 30 m/s, representa gráficamente la velocidad en función del tiempo y el espacio recorrido en función del tiempo.*

COMPETENCIA MATEMÁTICA

12 Funciones lineales y afines

EN LA VIDA COTIDIANA... Matemáticas en la prensa

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Realizar cálculos con magnitudes asociadas a un periódico: área de papel, grosor y tirada.
• Conocer el fenómeno de la publicidad en la prensa escrita. • Relacionar y trabajar la proporcionalidad directa con los periódicos. • Relacionar y trabajar la proporcionalidad inversa con los periódicos.

1 Las dimensiones, el grosor y la tirada de un periódico

Los medios de comunicación tienen una enorme influencia en la sociedad actual. Vamos a estudiar en este proyecto uno de los más importantes: los periódicos o diarios, que son parte de la prensa escrita.

Para ello será conveniente que compres o pidas varios periódicos con los que puedas realizar las actividades que te proponemos.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

La rotativa de un periódico, para hacer una estimación de los gastos, necesita calcular la cantidad de papel en metros cuadrados que tiene que comprar para la elaboración del periódico durante un mes.

Las dimensiones de este diario son 29×41 cm, tiene 72 páginas y su tirada, es decir, el número de periódicos que se imprimen al día, es de 180.000 ejemplares.

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *¿Qué área de papel se gasta en imprimir un ejemplar del periódico? ¿Y en imprimir mil? ¿Y diez mil?*

b) *¿Cuánto papel se utiliza en la tirada diaria? ¿Y en la tirada mensual?*

c) *¿Qué tipo de relación existe entre la tirada de un periódico y el área del papel que emplea?*

d) *Expresa algebraicamente la relación anterior y represéntala gráficamente.*

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

El dueño de un kiosco vende cada día 100 ejemplares de diarios deportivos y 80 de diarios de información general. Quiere poner a la venta 50 ejemplares de diarios económicos y necesita saber el espacio (volumen) adicional que necesita.

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *¿Qué grosor tiene una página de periódico? Para obtenerlo mide el grosor de un periódico y divide el resultado entre el número de páginas.*

b) *Calcula el espacio (volumen) que ocupa un periódico. Suponemos que tiene 70 páginas, de las dimensiones indicadas, y que su grosor de página es el que has hallado en el apartado anterior.*

c) *Expresa algebraicamente la función que relaciona el volumen de un periódico con su número de páginas. Represéntala.*

d) *Suponiendo que todos los periódicos del kiosco tienen el mismo grosor, ¿qué volumen ocupaban en el kiosco los periódicos deportivos y de información general?*

e) *¿Qué volumen ocuparán todos los periódicos que van a poner a la venta en el kiosco?*

f) *Expresa algebraicamente la función que relaciona el volumen con el número de periódicos puestos a la venta. Represéntala.*

COMPETENCIA MATEMÁTICA

2 Los anuncios en la prensa

Una de las principales fuentes de ingresos de las empresas que publican periódicos es el dinero obtenido por la inclusión en ellos de anuncios publicitarios.

Si observas un periódico verás que casi todas las páginas llevan anuncios de distinta índole. Además, suele existir una sección específica dedicada a los anuncios por palabras incluidos por particulares y empresas.


ANUNCIOS POR PALABRAS

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

La dirección de un periódico quiere revisar el dinero que gana en los anuncios por palabras. Las tarifas por palabra (en euros) son las que figuran en la siguiente tabla.

	Día laborable	Domingo
Anuncio normal	0,96	1,20
Anuncio destacado	1,33	1,51

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Si en un día laborable, el periódico registra 80.000 palabras en anuncios normales y 20.000 palabras en anuncios destacados, ¿qué ingresos obtiene en total?*

b) *Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona, en un día laborable, el número de palabras con los ingresos. Hazlo para los anuncios normales y destacados por separado.*

c) *Representa en una misma gráfica las funciones del apartado b). ¿Cuál tiene mayor pendiente? ¿Qué gráfica está por encima de la otra?*

d) *La dirección del periódico quiere crear una única categoría de anuncios. ¿Cuántos euros por palabra debería cobrar en un día laborable para que los ingresos totales fuesen los mismos que los obtenidos en el apartado a)?*

e) *Representa la función que relaciona los ingresos totales y el número de palabras en un día laborable con esa única categoría de anuncios. ¿Qué situación tiene la gráfica respecto de las representadas en el apartado b)?*

f) *Responde a los apartados a), b), c), d) y e), considerando que los anuncios se publican un domingo.*

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

La dirección del periódico anterior ha decidido, finalmente, crear una única categoría de anuncios por palabras sin distinguir entre días laborables y festivos. Desea obtener cada mes un total de 3 millones de euros de ingresos, pero aún no ha decidido a qué precio cobrar cada palabra.

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Si se fija el precio por palabra a 1 €, ¿cuántas palabras deberán ponerse en la sección de anuncios por palabras para obtener los ingresos previstos?*

b) *Si en un mes se incluyen 80.000 palabras diarias, ¿a qué precio debería cobrarse cada palabra para conseguir los ingresos previstos?*

c) *Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona el precio por palabra y el número de palabras que se deben insertar al día para obtener los ingresos deseados.*

d) *Representa la función anterior. ¿Qué forma tiene su gráfica?*

e) *La dirección del periódico sabe que, en el mes de diciembre, el número de palabras se incrementa en un 10 %. Si aumenta el precio por palabra un 15 %, ¿en qué porcentaje aumentarán los ingresos totales respecto de los 3 millones?*

13 Estadística

EN LA VIDA COTIDIANA... La población española

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Conocer estadísticamente la población española y calcular densidades de población y tasas de natalidad y mortalidad. • Obtener información a partir del análisis de gráficos estadísticos. • Elegir los gráficos adecuados para representar tablas de datos.

1 Análisis estadístico de la población española

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Estos son los datos de la población española a 1 de enero de 2002, por Comunidades Autónomas y su extensión en km^2.

Comunidad	Población	km^2
Andalucía	7.478.432	87.595
Aragón	1.217.514	47.720
Principado de Asturias	1.073.971	10.604
Baleares	916.968	4.992
Canarias	1.843.755	7.492
Cantabria	542.275	5.321
Castilla-La Mancha	1.782.038	79.461
Castilla y León	2.480.369	94.224
Cataluña	6.506.440	32.113
Comunidad Valenciana	4.326.708	23.255
Extremadura	1.073.050	41.634
Galicia	2.737.370	29.575
Comunidad de Madrid	5.527.152	8.028
Murcia	1.226.993	11.314
Comunidad Foral de Navarra	569.628	10.391
País Vasco	2.108.281	7.234
La Rioja	281.614	5.045
Ceuta	76.152	20
Melilla	69.184	12
	41.837.894	506.030

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *¿Qué Comunidad tiene mayor población?*

b) *¿Cuál tiene mayor extensión? ¿Y menor?*

c) *Calcula la densidad de población de las distintas Comunidades. ¿Cuál tiene mayor densidad?*

d) *Representa gráficamente la densidad de las Comunidades. ¿Qué tipo de gráfico vas a utilizar? ¿Por qué lo has escogido?*

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Para estudiar la evolución de la población se definen las tasas de nacimientos, defunciones y matrimonios. Estas tasas se expresan por cada mil habitantes; así, una tasa de nacimientos de 120 por mil significa que por cada mil habitantes nacieron 120 bebés.

REALIZA ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Halla la tasa de nacimientos, defunciones y matrimonios en España en el año 2002, sabiendo que hubo 209.065 matrimonios, 416.518 nacimientos y 366.358 defunciones.*

b) *Calcula la tasa de crecimiento vegetativo (nacimientos menos defunciones) en dicho año.*

c) *Halla la tasa de nacimientos en las distintas Comunidades y represéntala, sabiendo que el número de nacimientos fue (en el mismo orden de la tabla): 81.980, 10.393, 6.783, 10.351, 19.020, 4.517, 16.551, 18.058, 68.314, 43.912, 9.724, 19.350, 63.212, 15.501, 5.809, 18.242, 2.537, 1.055, 1.209.*

2 Utilización e interpretación de gráficos para representar datos

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Observa el número de nacimientos en España en el período 1994-2002:

Año	Nacimientos
1994	370.148
1995	365.469
1996	362.626
1997	369.035
1998	365.193
1999	380.130
2000	397.632
2001	406.380
2002	416.518

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

¿Cómo representarías los datos: mediante un diagrama de barras, un histograma o un gráfico de sectores? Represéntalos de la forma más adecuada.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Esta tabla muestra los cinco municipios más poblados en España a 1 de enero de 2002:

Municipio	Habitantes
Madrid	3.016.788
Barcelona	1.527.190
Valencia	761.871
Sevilla	704.114
Zaragoza	620.419

REALIZA ESTAS ACTIVIDADES.

a) *¿Qué porcentaje de la población total (41.837.894) representan los datos por separado? ¿Y juntos?*

b) *Representa los datos mediante un gráfico de sectores. ¿Te parece un gráfico adecuado?*

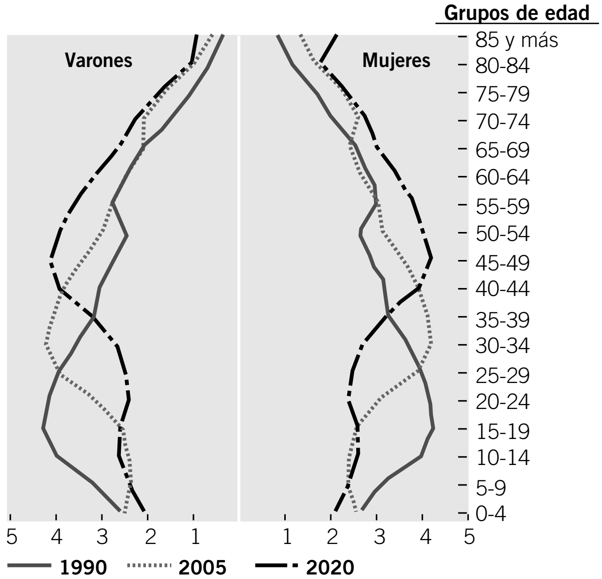
A continuación tienes representadas las pirámides de población en España proyectadas de los años 1990, 2005 y 2020.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

En ellas aparece, para cada sexo y segmento de edades, el tanto por ciento que representa sobre el total de la población. Así, puedes ver que en 2020 los varones entre 0 y 4 años serán el 2 % de la población total.

HAZ ESTA ACTIVIDAD.

Comenta cada una de las pirámides. ¿Cómo evolucionará la población española?



14 Probabilidad

EN LA VIDA COTIDIANA... Sondeos de opinión

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Conocer la ley que regula el proceso electoral español en el Congreso de los Diputados. • Relacionar el número de votos obtenidos con el de escaños conseguidos aplicando la ley D'Hont. • Aplicar una ley proporcional para transformar el número de votos en escaños. • Investigar las situaciones más desfavorecidas al aplicar la ley D'Hont.

1 Características de la ley D'Hon't

La Ley Orgánica de Régimen Electoral General 5/1985, de 19 de junio, en su artículo 162 dice:

1.º El Congreso está formado por 350 diputados.

2.º A cada provincia le corresponde un mínimo de 2 diputados y a las poblaciones de Ceuta y Melilla un diputado para cada una.

3.º Los 248 diputados restantes se distribuyen entre las provincias en proporción a su población. Para ello:

a) Se obtiene una cuota de reparto resultante de dividir entre 248 el total de la población de derecho de las provincias peninsulares e insulares.

b) Se adjudican a cada provincia tantos diputados como resulten (en números enteros) de dividir la población de derecho provincial entre la cuota de reparto.

c) Los diputados restantes se distribuyen asignando uno a cada una de las provincias cuyo cociente obtenido conforme b) tenga una fracción decimal mayor.

4.º El decreto de convocatoria debe especificar el número de diputados que se elegirán en cada circunscripción.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

El número de diputados que correspondió a cada provincia después de obtener la cuota de reparto fue:

A Coruña	9	Huelva	5
Álava	4	Huesca	3
Albacete	4	Jaén	6
Alicante	11	La Rioja	4
Almería	5	Las Palmas	7
Asturias	9	León	5
Ávila	3	Lleida	4
Badajoz	6	Lugo	4
Baleares	7	Madrid	34
Barcelona	31	Málaga	10
Burgos	4	Murcia	9
Cáceres	5	Navarra	5
Cádiz	9	Ourense	4
Cantabria	5	Palencia	3
Castellón	5	Pontevedra	8
Ciudad Real	5	Salamanca	4
Córdoba	7	Sta. Cruz de Tenerife	7
Cuenca	3	Segovia	3
Girona	5	Sevilla	13
Granada	7	Soria	3
Guadalajara	3	Tarragona	6
Guipúzcoa	6	Teruel	3
Toledo	5	Vizcaya	9
Valencia	16	Zamora	3
Valladolid	5	Zaragoza	7
Ceuta	1	Melilla	1

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Escribe las diez provincias españolas con mayor población de derecho, ordenadas de mayor a menor.*

b) *¿Qué provincias tienen un solo diputado?*

c) *¿Por qué la Ley Orgánica establece un mínimo de dos diputados por provincia?*

2 Aplicación de la ley D'Hont

Según el artículo 163 de la Ley Orgánica, la atribución de los escaños en función de los resultados del escrutinio, se realiza de esta manera.

a) No se tienen en cuenta aquellas candidaturas que no hubieran obtenido al menos el 3 % de los votos válidos por la circunscripción.

b) Se ordenan, de mayor a menor, en una columna las cifras de votos obtenidos por las distintas candidaturas. Se divide el número de votos obtenido entre 1, 2, 3... hasta un número igual al de los escaños de la circunscripción. Los escaños se atribuyen a las candidaturas que obtengan los cocientes mayores.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Así, por ejemplo, en una circunscripción que elige a 4 candidatos, si los votos válidos han sido 240.000 repartidos en seis candidaturas *A*(84.000), *B*(52.000), *C*(36.000), *D*(32.000), *E*(20.000) y *F*(16.000), el reparto se hace así:

División	: 1	: 2	: 3	: 4
A	**84.000**	**42.000**	28.000	21.000
B	**52.000**	26.000	17.333	13.000
C	**36.000**	18.000	12.000	9.000
D	32.000	16.000	10.667	8.000
E	20.000	10.000	6.667	5.000
F	16.000	8.000	5.333	4.000

La candidatura *A* obtiene dos escaños y las candidaturas *B* y *C* un escaño cada una.

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *En las últimas elecciones los resultados en Valladolid fueron los siguientes (porcentajes respecto a los votos válidos).*

Candidaturas	PP	PSOE	IU	Otros
Votos	168.780	111.588	19.246	17.986
%	53,14	35,13	6,06	5,66

Sabiendo que eran 5 los escaños por repartir, aplica la ley D'Hont y obtén el número de diputados correspondientes a los partidos en Valladolid.

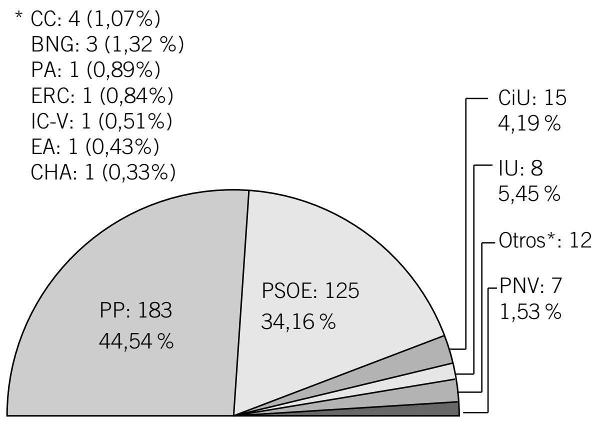
b) *En Tarragona, los resultados fueron:*

Candidaturas	PSC	CiU	PP	ERC	Otros
Votos	101.817	97.616	76.468	19.277	18.976
%	32,41	31,07	24,34	6,14	6,04

Sabiendo que son 6 los escaños por repartir, ¿cuántos diputados alcanzó cada formación política?

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Aquí tienes la distribución de los escaños correspondiente al año 2000:



Los resultados totales del año 2000 fueron:

Candidaturas	Votos	%	Escaños
PP	10.321.178	44,52	183
PSOE	7.918.752	34,16	125
IU	1.263.043	5,45	8
CiU	970.421	4,19	15
PNV	353.953	1,53	7
BNG	306.268	1,32	3
CC	248.261	1,07	4
PA	206.255	0,89	1
ERC	194.715	0,84	1
IC-V	119.290	0,51	1
EA	100.742	0,43	1
Chunta Ar.	75.356	0,33	1
Otros	1.103.056	4,76	0

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *¿Qué ángulo le corresponde a cada sector de los partidos en el hemiciclo de los diputados?*

b) *Convierte el gráfico del hemiciclo en un gráfico de sectores. ¿Qué ángulo le corresponde a cada sector?*

c) *Si el reparto de los 350 escaños se hiciera de forma directamente proporcional al porcentaje de votos obtenido, halla el número de escaños que le correspondería a cada partido.*

d) *¿Qué diferencias observas entre el resultado de la pregunta anterior y el que nos proporciona la ley D'Hont (cuarta columna de la tabla)?*

RECURSOS PARA EL AULA

COMPETENCIA MATEMÁTICA