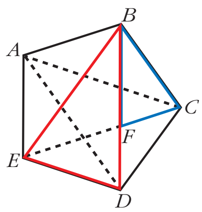
UNIDAD 1 NÚMEROS REALES

Página 28

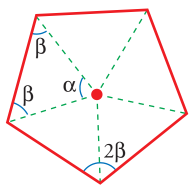
Número áureo

a) Demuestra que los triángulos *BED* y *BCF* son semejantes.



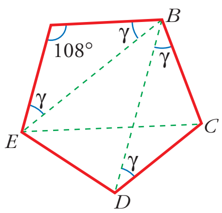
Recordamos los ángulos de un pentágono:

1º



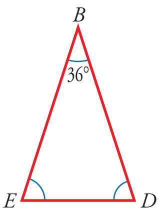
$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°; \quad \beta = \frac{180° - 72°}{2} = 54°; \quad 2\beta = 108°$$

2º



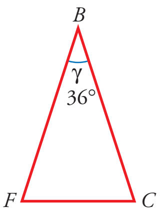
$$\gamma = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$$

3º



$$\hat{B} = 108° - 2 \cdot 36° = 36°$$

$$\hat{E} = \hat{D} = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$$



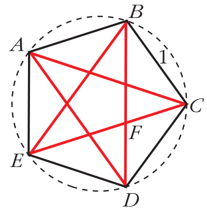
Sabíamos que $\gamma = 36°$.

El triángulo *BEC* es idéntico al *BED*:

$$\hat{C} = \hat{E} = \hat{D} = 72° \Rightarrow \hat{F} = 72°$$

Luego los dos triángulos tienen sus ángulos iguales $\Rightarrow$ son semejantes.

b) Llamando $l = \overline{BE} = \overline{BD} = \overline{EC}$ y tomando como unidad el lado del pentágono, $\overline{BC} = \overline{BF} = \overline{ED} = \overline{EF} = 1$, a partir de la semejanza anterior has de llegar a la siguiente ecuación:



$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1}$$

Despejando l obtendrás su valor.

Por ser semejantes (apartado a)) $\Rightarrow \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{FC}}$, es decir: $\dfrac{l}{1} = \dfrac{1}{l-1}$.

Despejamos l:

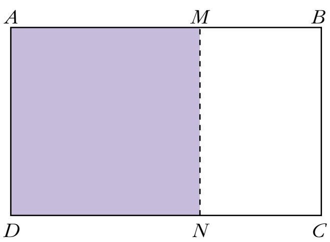
$$l(l-1) = 1 \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como l es una longitud, la solución válida es la positiva:

$$l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$ Este es el número áureo, Φ.

Página 29

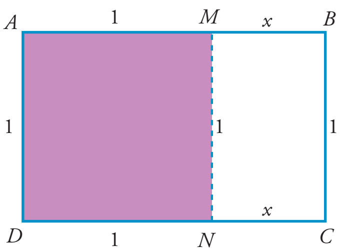
Rectángulo áureo



El rectángulo adjunto tiene la peculiaridad de que si le suprimimos un cuadrado, el rectángulo que queda, *MBCN*, es semejante al rectángulo inicial *ABCD*. Comprueba que, efectivamente, en tal caso, el rectángulo es áureo, es decir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi \quad \textbf{(número de oro)}$$

Tomamos como unidad el lado pequeño del rectángulo: $\overline{AD} = \overline{BC} = 1$, y llamamos $x = \overline{MB} = \overline{NC}$. Así:



Al ser semejantes los rectángulos, tenemos que: $\dfrac{1+x}{1} = \dfrac{1}{x}$

Despejamos x:

$$x(1+x) = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x es una longitud, la solución válida es la positiva:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Hallamos la razón entre los lados del rectángulo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1 + x}{1} = 1 + x = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2 - 1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

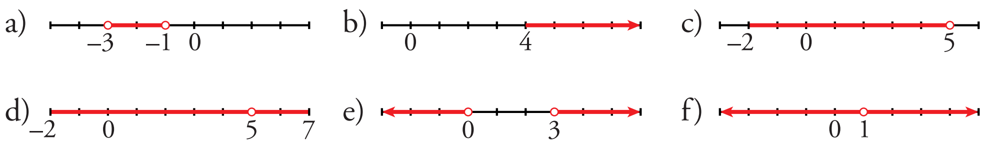
Obtenemos el número de oro.

Página 33

1. Representa los siguientes conjuntos numéricos:

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$ **c)** $\{x / -2 \le x < 5\}$

d) $[-2, 5) \cup (5, 7]$ **e)** $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **f)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



Página 34

1. Halla: a) $|-11|$ **b)** $|\pi|$ **c)** $|-\sqrt{5}|$ **d)** $|0|$ **e)** $|3 - \pi|$

a) 11 b) π c) $\sqrt{5}$ d) 0 e) $\pi - 3$

2. Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

a) $|x| = 5$; **b)** $|x| \le 5$; **c)** $|x - 4| = 2$; **d)** $|x - 4| \le 2$; **e)** $|x - 4| > 2$

a) 5 y –5 b) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$ c) 6 y 2

d) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$ e) $x < 2$ ó $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

Página 35

1. Simplifica:

a) $\sqrt[12]{x^8}$; **b)** $\sqrt[5]{y^{10}}$; **c)** $\sqrt[6]{(c^2)^5}$; **d)** $\sqrt[6]{8}$; **e)** $\sqrt[9]{64}$; **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[3]{x^2}$ b) y^2 c) $\sqrt[3]{c^5} = c\sqrt[3]{c^2}$

d) $\sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ e) $\sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2}$ f) $\sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2. **Reduce a índice común: a)** $\sqrt[4]{31}$ **y** $\sqrt[3]{13}$; **b)** $\sqrt[12]{a^5}$ **y** $\sqrt[18]{a^7}$

a) $\sqrt[12]{31^3}$ y $\sqrt[12]{13^4}$; $\sqrt[12]{29\,791}$ y $\sqrt[12]{28\,561}$ b) $\sqrt[36]{a^{15}}$ y $\sqrt[36]{a^{14}}$

3. **Simplifica: a)** $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\right)^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8 = k$ b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 36

4. **Reduce: a)** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

5. **Simplifica: a)** $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}} = \sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt[15]{x^{-2}}$ b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3\,b^3}{a^2\,b^2}} = \sqrt[6]{a\,b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3\,b^5\,c}{a^2\,b^6\,c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{b\,c^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{b\,c}}$

6. **Reduce: a)** $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt[6]{\dfrac{3^4}{3^3}} = \sqrt[6]{3}$ b) $\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

7. **Suma y simplifica: a)** $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$
c) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$ **d)** $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

Página 37

8. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ **c)** $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$

d) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ **e)** $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **f)** $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}=\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)}=\sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5}=\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12}=\dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6}=\dfrac{30+12\sqrt{6}}{6}=5+2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{1}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

Página 386

1. Expresa con un número razonable de cifras significativas las siguientes cantidades:

- **Visitantes anuales a cierta exposición: 1 345 589 personas.**
- **Asistentes a una manifestación ecológica: 125 341 personas.**
- **Bacterias en 1 dm^3 de cierto preparado: 203 305 123 bacterias.**

- **Número de gotas de agua que hay en una piscina: 8 249 327 741 gotas.**
- **Número de granos en un saco de arena de 50 kg: 2 937 248 granos.**

Por ejemplo: (I) 1 300 000 personas.

(II) 125 000 personas.

(III) 203 millones de bacterias.

(IV) 8 000 millones de gotas.

(V) 3 millones de granos.

Página 39

2. Da una cota del error absoluto y otra del error relativo en las cantidades que has expresado en el ejercicio de la página anterior.

Por ejemplo: (I) e. a. < 50 000; e. r. < $\frac{5}{130}$; (II) e. a. < 500; e. r. < $\frac{1}{250}$

(III) e. a. < 500 000; e. r. < $\frac{1}{405}$ (IV) e. a. < 300 millones; e. r. < $\frac{3}{80}$

(V) e. a. < 100 000; e. r. < $\frac{1}{30}$

Página 41

1. Opera con la calculadora:

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6})$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9}$

a) 3,87 15 5,96 9 3,941 6 [redacted]

Es decir: $5{,}85 \cdot 10^{12}$

b) 8,93 10 7,64 10 1,42 9 [redacted]

Es decir: $2{,}37 \cdot 10^{-10}$

Página 42

1. Halla: **a)** $\log_2 16$ **b)** $\log_2 0{,}5$ **c)** $\log_{10} 1\,000$

d) $\log_{10} 0{,}01$ **e)** $\log_4 64$ **f)** $\log_7 49$

a) $\log_2 2^4 = 4$ b) $\log_2 2^{-1} = -1$ c) $\log_{10} 10^3 = 3$

d) $\log_{10} 10^{-2} = -2$ e) $\log_4 4^3 = 3$ f) $\log_7 7^2 = 2$

Página 43

2. Aplica la propiedad 7 para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:

a) $log_2\ 1\,500$ **b)** $log_5\ 200$ **c)** $log_{100}\ 200$ **d)** $log_{100}\ 40$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

a) $\dfrac{log\ 1\,500}{log\ 2} = 10{,}55;\ \ 2^{10{,}55} \approx 1\,500$

b) $\dfrac{log\ 200}{log\ 5} = 3{,}29;\ \ 5^{3{,}29} \approx 200$

c) $\dfrac{log\ 200}{log\ 100} = 1{,}15;\ \ 100^{1{,}15} \approx 200$

d) $\dfrac{log\ 40}{log\ 100} = 0{,}80;\ \ 100^{0{,}80} \approx 40$

Página 47

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Números racionales e irracionales

1 Expresa como fracción cada decimal y opera:

$$0{,}\widehat{12} - 5{,}\widehat{6} - 0{,}2\widehat{3} + 3{,}1$$

☛ ***Recuerda que*** $5{,}\widehat{6} = \dfrac{56-5}{9}$; $0{,}2\widehat{3} = \dfrac{23-2}{90}$.

$$\frac{12}{99} - \frac{51}{9} - \frac{21}{90} + \frac{31}{10} = -\frac{442}{165} = -2{,}6\widehat{78}$$

2 Demuestra que el producto $4{,}0\widehat{9} \cdot 1{,}3\widehat{9}$ es un decimal exacto.

☛ ***Comprueba, pasando a fracción, que los dos factores son decimales exactos.***

$$4{,}0\widehat{9} = \frac{409-40}{90} = \frac{369}{90} = 4{,}1 \qquad 1{,}3\widehat{9} = \frac{139-13}{90} = \frac{126}{90} = 1{,}4$$

$$4{,}0\widehat{9} \cdot 1{,}3\widehat{9} = 4{,}1 \cdot 1{,}4 = 5{,}74$$

3 Calcula: a) $\sqrt{1{,}\widehat{7}}$ **b)** $\dfrac{1{,}\widehat{3}}{3}$

a) $\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3} = 1{,}\widehat{3}$

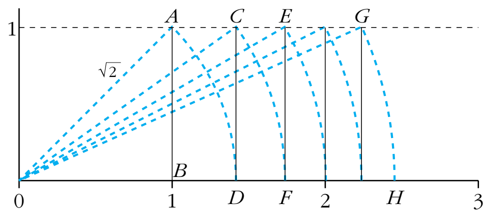
b) $\dfrac{4}{9} = \dfrac{2}{3} = 0{,}\widehat{4}$

4 Indica cuál, de cada par de números, es mayor:

a) $\dfrac{140}{99}$ **y** $\sqrt{2}$ **b)** $0{,}52\widehat{6}$ **y** $0{,}\widehat{526}$ **c)** $4{,}\widehat{89}$ **y** $2\sqrt{6}$ **d)** $-2{,}098$ **y** $-2{,}1$

a) $\sqrt{2}$ b) $0{,}52\widehat{6}$ c) $4{,}\widehat{89}$ d) $-2{,}098$

5 **Observa cómo hemos representado algunos números irracionales:**



En el triángulo $\boldsymbol{OAB}$, $\overline{OB} = 1$, $\overline{AB} = 1$ **y** $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Por tanto, el punto $\boldsymbol{D}$ **representa a** $\sqrt{2}$.

¿Qué números representan los puntos $\boldsymbol{F}$ **y** $\boldsymbol{H}$**? Justifica tu respuesta.**

F representa $\sqrt{3}$, pues $\overline{OF} = \overline{OC} = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{DC}^2} = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = \sqrt{3}$

H representa $\sqrt{6}$, pues $\overline{OH} = \overline{OG} = (\sqrt{5})^2 + 1^2 = \sqrt{6}$

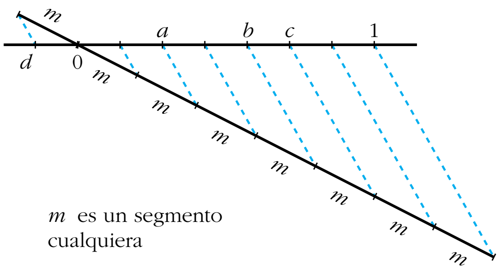
6 **¿Cuáles son los números racionales** $\boldsymbol{a, b, c, d}$ **representados en este gráfico?**

$a = \dfrac{2}{7}$

$b = \dfrac{4}{7}$

$c = \dfrac{5}{7}$

$d = -\dfrac{1}{7}$



Potencias

7 **Halla sin calculadora:** $\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4}\right)^{-2} \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{9}\right)^{-1} + 4$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4 = -4 + 4 = 0$$

8 **Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:**

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$ **b)** $\dfrac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$ **c)** $\dfrac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$ **d)** $\dfrac{a^{-3} b^{-4} c^7}{a^{-5} b^2 c^{-1}}$

☛ ***Mira, en EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS, el nº 4 a).***

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \dfrac{5}{2}$

b) $\dfrac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \dfrac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \dfrac{80}{27}$

c) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \dfrac{1}{2^8} = 2^{-8} = \dfrac{1}{256}$

d) $\dfrac{c^7 a^5 c}{a^3 b^4 b^2} = \dfrac{a^2 c^8}{b^6}$

9 **Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:**

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9}$

b) $\dfrac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$

c) $a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}}$

10 **Resuelve, sin utilizar la calculadora:**

a) $\sqrt[5]{32}$ **b)** $\sqrt[3]{343}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$ **d)** $\sqrt{0,25}$ **e)** $\sqrt[3]{8^4}$ **f)** $\sqrt[3]{0,001}$

a) $\sqrt[5]{2^5} = 2$ b) $\sqrt[3]{7^3} = 7$ c) $\sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ e) $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$ f) $\sqrt[3]{0,1^3} = 0,1$

11 **Expresa como una potencia de base 2:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $(-32)^{1/5}$ **c)** $(\sqrt[8]{2})^4$

a) $2^{-1/2}$

b) $(-2^5)^{1/5} = -2$

c) $2^{4/8} = 2^{1/2}$

12 **Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:**

a) $4 \cdot \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$ **b)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \dfrac{1}{8}$

c) $\dfrac{(-5)^3\,(-8)^3\,(-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$ **d)** $\dfrac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(-3)^3}{2^3} = \dfrac{-3^2}{2} = \dfrac{-9}{2}$

b) $\dfrac{1}{2^4} \cdot \dfrac{3^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{3^2}{2^8} = \dfrac{9}{256}$

c) $\dfrac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \dfrac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} = \dfrac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \dfrac{18}{125}$

d) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\dfrac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \dfrac{-3}{400}$

13 **Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:**

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$

b) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\dfrac{a^{3/4} \cdot a^{-1}}{a \cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{7}}$

b) $(2^4)^{1/4} \cdot (2^2)^{-1/3} \cdot (2^2)^{-1/6} = 2 \cdot 2^{-2/3} \cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1$

14 **Justifica las igualdades que son verdaderas. Escribe el resultado correcto en las falsas:**

a) $\dfrac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = 1$

b) $(3^{-2})^{-3}\left(\dfrac{1}{27}\right)^2 = 1$

c) $\dfrac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \dfrac{8}{15}$

d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = \dfrac{80}{9}$

a) Falsa. $\dfrac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = \dfrac{a^4}{b^4}$

b) Verdadera. $(3^{-2})^{-3} \cdot \left(\dfrac{1}{27}\right)^2 = 3^6 \cdot \left(\dfrac{1}{3^3}\right)^2 = 3^6 \cdot \dfrac{1}{3^6} = \dfrac{3^6}{3^6} = 1$

c) Verdadera. $\dfrac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \dfrac{(1/3^2) - (1/5^2)}{1/3 - 1/5} = \dfrac{(1/3 - 1/5)\,(1/3 + 1/5)}{(1/3 - 1/5)} =$

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{8}{15}$

d) Verdadera. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = 3^2 - \dfrac{1}{(-3)^2} = 3^2 - \dfrac{1}{3^2} = 9 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{81 - 1}{9} = \dfrac{80}{9}$

15 **Demuestra, utilizando potencias, que:**

a) $(0{,}125)^{1/3} = 2^{-1}$

b) $(0{,}25)^{-1/2} = 2$

a) $(0{,}125)^{1/3} = \left(\dfrac{125}{1\,000}\right)^{1/3} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/3} = \left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{1/3} = \dfrac{1}{2} = 2^{-1}$

b) $(0{,}25)^{-1/2} = \left(\dfrac{25}{100}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{1}{2^2}\right)^{-1/2} = (2^2)^{1/2} = 2$

Página 48

Radicales

16 **Introduce los factores dentro de cada raíz:**

a) $2\sqrt[3]{3}$ **b)** $4\sqrt[4]{\dfrac{1}{4}}$ **c)** $\dfrac{2}{x}\sqrt{\dfrac{3x}{8}}$

d) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{25}{9}}$ **e)** $2\sqrt[4]{4}$ **f)** $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\dfrac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{25}}$

17 **Saca de la raíz el factor que puedas:**

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $4\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{1\,000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{125a^2}{16b}}$ **f)** $\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\dfrac{16}{a^3}}$ **h)** $\sqrt{4a^2+4}$ **i)** $\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $4\sqrt[3]{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{\dfrac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \dfrac{5a}{4}\sqrt{\dfrac{5}{b}}$

f) $\sqrt{\dfrac{13}{36}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\dfrac{4}{a}\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

h) $\sqrt{4(a^2+1)} = 2\sqrt{a^2+1}$

i) $\sqrt{\dfrac{25a}{16 \cdot 9}} = \dfrac{5\sqrt{a}}{12}$

18 **Simplifica:**

a) $\sqrt[6]{0{,}027}$ **b)** $\sqrt[8]{0{,}0016}$ **c)** $\sqrt[4]{1+\dfrac{9}{16}}$

a) $\sqrt[6]{\dfrac{27}{1\,000}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3}{10^3}} = \sqrt[6]{\left(\dfrac{3}{10}\right)^3} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^{3/6} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{3}{10}}$

b) $\sqrt[8]{\dfrac{16}{10\,000}} = \sqrt[8]{\dfrac{2^4}{10^4}} = \sqrt[8]{\left(\dfrac{2}{10}\right)^4} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{4/8} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{1}{5}}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{25}{16}} = \sqrt[4]{\dfrac{5^2}{4^2}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{2/4} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{1/2} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

19 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{24}$ **b)** $\sqrt[6]{27}$ **c)** $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64\,y^3}$ **e)** $\sqrt[4]{\dfrac{81}{64}}$ **f)** $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{2^6}} = \dfrac{3}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

20 **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:**

a) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$

b) $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[4]{72}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{64}, \sqrt[12]{81}, \sqrt[12]{64};\ \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{216}, \sqrt[6]{16};\ \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7\,776}, \sqrt[20]{10\,000};\ \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{373\,248}, \sqrt[12]{6\,561}, \sqrt[12]{10\,000};\ \sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{72}$

21 **Realiza la operación y simplifica si es posible:**

a) $4\sqrt{27}\cdot 5\sqrt{6}$ **b)** $2\sqrt{\dfrac{4}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{27}{8}}$ **c)** $\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1}{8}}$

d) $\left(\sqrt[3]{12}\right)^2$ **e)** $\left(\sqrt[6]{32}\right)^3$ **f)** $\sqrt[3]{24}:\sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27\cdot 6} = 20\sqrt{3^3\cdot 2\cdot 3} = 20\sqrt{2\cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\dfrac{4\cdot 27}{3\cdot 8}} = 2\sqrt{\dfrac{9}{2}} = 6\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{8}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\left(\sqrt[3]{2^2\cdot 3}\right)^2 = \sqrt[3]{2^4\cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2\cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $\left(\sqrt[6]{2^5}\right)^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3\cdot 3}:\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{3} = 2$

22 **Efectúa y simplifica, si es posible:**

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}\sqrt{a}$

c) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ **d)** $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}:\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

☛ ***En b) y c) puedes expresar los radicales como potencias de bases a y 2, respectivamente.***

a) $\sqrt[6]{2^2\cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt{a} = \sqrt{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2^{12}}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 3}}:\sqrt{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[6]{2^2\cdot 3}:\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

23 **Expresa con solo una raíz:**

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ **c)** $\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right):\sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4}$

b) $\sqrt[12]{2^4\cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\dfrac{a^{15}\cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a\sqrt[20]{a}$

24 **Racionaliza los denominadores y simplifica:**

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{72}+3\sqrt{32}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot 3^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$

c) $\dfrac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{3\,(3-\sqrt{3})}{9-3} = \dfrac{9-3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3\,(3-\sqrt{3})}{2\cdot 3} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2^3\cdot 3^2}+3\sqrt{2^5}-\sqrt{2^3}}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{3\sqrt{8}+6\sqrt{8}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \dfrac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 8$

25 **Calcula y simplifica:**

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\dfrac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\dfrac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{125}+\sqrt{54}-\sqrt{45}-\sqrt{24}$

d) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-1\right)$

a) $25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-21\sqrt[3]{2} = -20\sqrt[3]{2}$

c) $5\sqrt{5}+3\sqrt{6}-3\sqrt{5}-2\sqrt{6} = 2\sqrt{5}+\sqrt{6}$

d) $\sqrt{12}-\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{3} = 2\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3} = \sqrt{3}+2\sqrt{2}$

26 **Simplifica al máximo las siguientes expresiones:**

a) $3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{250}+5\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}-4\sqrt{\dfrac{18}{125}}+\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8}{45}}$

c) $7\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}+\dfrac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $3\sqrt[3]{2^4} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + 5\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - 4\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{-53}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $7\sqrt[3]{3^4 \cdot a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = 21\sqrt[3]{3a} - 2a\sqrt[3]{3a} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \left(\frac{106}{5} - 2a\right)\sqrt[3]{3a}$

27 **Efectúa y simplifica:**

a) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right) 2\sqrt{2}$

c) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)$

d) $\left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)^2$

e) $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{3}$

a) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{12} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$

c) $5 - 6 = -1$

d) $20 + 18 - 12\sqrt{10} = 38 - 12\sqrt{10}$

e) $(2 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

28 **Racionaliza y simplifica:**

a) $\dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\dfrac{1}{2\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{5} - 2}$

e) $\dfrac{11}{2\sqrt{5} + 3}$

f) $\dfrac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\left(2\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{6} - 2}{3 \cdot 2} =$

$= \dfrac{2\left(\sqrt{6} - 1\right)}{3 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{6} - 1}{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\left(2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{6 + \sqrt{6}}{6} = 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\dfrac{\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)}{2\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)} = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2(3 - 5)} = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{-4} = -\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4}$

d) $\dfrac{3\left(\sqrt{5} + 2\right)}{\left(\sqrt{5} - 2\right)\left(\sqrt{5} + 2\right)} = \dfrac{3\left(\sqrt{5} + 2\right)}{5 - 4} = 3\left(\sqrt{5} + 2\right) = 3\sqrt{5} + 6$

e) $\dfrac{11(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)(2\sqrt{5}-3)} = \dfrac{11(2\sqrt{5}-3)}{20-9} = \dfrac{11(2\sqrt{5}-3)}{11} = 2\sqrt{5}-3$

f) $\dfrac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)} = \dfrac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4} = \dfrac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23} =$

$= \dfrac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23} = \dfrac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$

29 **Racionaliza y efectúa:**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+5\sqrt{2}$

b) $\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} = \dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} =$

$= \dfrac{2\sqrt{7}\,(-2\sqrt{5})}{2} = -2\sqrt{35}$

30 **Opera y simplifica:** $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}$

$\dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}} + \dfrac{1}{\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}} = 1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3} = 2$

Página 49

Notación científica

31 **Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas:**

a) $\dfrac{(3{,}12\cdot 10^{-5}+7{,}03\cdot 10^{-4})\,8{,}3\cdot 10^{8}}{4{,}32\cdot 10^{3}}$

b) $\dfrac{(12{,}5\cdot 10^{7}-8\cdot 10^{9})(3{,}5\cdot 10^{-5}+185)}{9{,}2\cdot 10^{6}}$

c) $\dfrac{5{,}431\cdot 10^{3}-6{,}51\cdot 10^{4}+385\cdot 10^{2}}{8{,}2\cdot 10^{-3}-2\cdot 10^{-4}}$

a) $1{,}41\cdot 10^{2}$ b) $-1{,}58\cdot 10^{5}$ c) $-2{,}65\cdot 10^{6}$

32 **Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén:**

a) $3{,}27 \cdot 10^{13}$; $85{,}7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$

b) $1{,}19 \cdot 10^{-9}$; $0{,}05 \cdot 10^{-7}$; $2\,000 \cdot 10^{-12}$

a) $8{,}57 \cdot 10^{13} > 4{,}53 \cdot 10^{13} > 3{,}27 \cdot 10^{13}$

b) $5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1{,}19 \cdot 10^{-9}$

33 **Efectúa:** $\dfrac{2 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{6} + 10^{5}}$

$-7{,}268 \cdot 10^{-12}$

34 **Expresa en notación científica y calcula:** $\dfrac{60\,000^3 \cdot 0{,}00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0{,}0002^5}$

$$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7{,}2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$$

35 **Considera los números:** $A = 3{,}2 \cdot 10^7$; $B = 5{,}28 \cdot 10^4$ **y** $C = 2{,}01 \cdot 10^5$.

Calcula $\dfrac{B + C}{A}$.

$0{,}00793125 = 7{,}93125 \cdot 10^{-3}$

36 **Si** $A = 3{,}24 \cdot 10^6$; $B = 5{,}1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3{,}8 \cdot 10^{11}$ **y** $D = 6{,}2 \cdot 10^{-6}$, **calcula** $\left(\dfrac{A}{B} + C\right) \cdot D$.

$2\,749\,882{,}353 \approx 2{,}7499 \cdot 10^6$

Aproximación y error

37 **Redondea a las centésimas:**

a) 185,573	**b) 0,077**	**c) 5,0637**
a) 185,57	b) 0,08	c) 5,06

38 **Expresa con tres cifras significativas:**

a) 958,72	**b) 1,593**	**c)223 679**
a) 959	b) 1,59	c) 224 000

39 **Di una cota del error absoluto y una cota del error relativo que se ha cometido al redondear cada número en los dos ejercicios anteriores.**

En el ejercicio 37:

a) e. a. = 0,003; e. r. = 0,000016

b) e. a. = –0,003; e. r. = –0,04

c) e. a. = 0,0037; e. r. = 0,0007

En el ejercicio 38:

a) e. a. = –0,28; e. r. = –0,0003

b) e. a. = 0,003; e. r. = 0,002

c) e. a. = –321; e. r. = –0,0014

40 **Aproxima estos números de forma que la cota del error absoluto sea la indicada en cada caso:**

a) 7,0852; ε = 0,001 **b) 427,85; ε = 1**

c) 427,85; ε = 0,1 **d) 13 429,2; ε = 100**

Da, en cada caso, una cota del error relativo.

a) 7,085; $\varepsilon_r < 0{,}0002$ b) 428; $\varepsilon_r < 0{,}003$

c) 427,9; $\varepsilon_r < 0{,}0003$ d) 13 400; $\varepsilon_r < 0{,}008$

41 **Los tiempos de utilización de una red de comunicaciones se redondean por exceso a cuartos de hora. Aproxima de esta forma los siguientes tiempos: 39 min; 80 min; 117 min.**

3/4 de hora, una hora y media y 2 horas, respectivamente.

42 **Al medir la longitud de una calle, obtuvimos 1 500 m, con un error absoluto menor que 2 m. Al medir la altura de una habitación, obtuvimos 2,80 m, con un error absoluto menor que 2 cm.**

¿Qué medida se hizo con más precisión?

Calculamos la cota del error relativo, tomando como valor real el obtenido al medir, que es una aproximación. La medida más precisa será la que tenga más pequeña la cota del error relativo.

- Longitud de la calle → error relativo $< \dfrac{2}{1\,500 - 2} \approx 0{,}001$

  (error absoluto < 2 m)

- Altura de la habitación → error relativo $< \dfrac{0{,}02}{2{,}80 - 0{,}02} \approx 0{,}007$

  (error absoluto < 0,02 m)

Por tanto, la medida de la calle se hizo con más precisión.

Intervalos

43 **Expresa como desigualdad y como intervalo y represéntalos:**

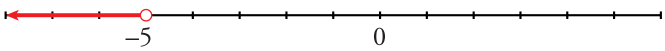
a) x es menor que –5.

b) 3 es menor o igual que x.

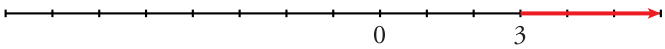
c) x está comprendido entre –5 y 1.

d) x está entre – 2 y 0, ambos incluidos.

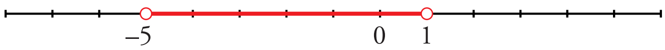
a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$



b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$



c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$



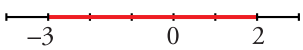
d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$

44 **Representa gráficamente y expresa como intervalos estas desigualdades:**

a) $-3 \le x \le 2$ **b)** $5 < x$ **c)** $x \ge -2$

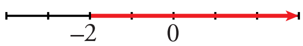
d) $-2 \le x < 3/2$ **e)** $4 < x < 4{,}1$ **f)** $-3 \le x$

a) $[-3, 2]$



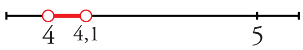
b) $(5, +\infty)$

c) $[-2, +\infty)$

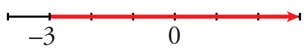


d) $\left[-2, \frac{3}{2}\right)$

e) $(4; 4{,}1)$



f) $[-3, +\infty)$



45 **Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos:**

a) $[-2, 7]$ **b)** $[13, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$ **e)** $[3/2, 6)$ **f)** $(-\infty, +\infty)$

a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

d) $-3 < x \le 0$ e) $\frac{3}{2} \le x < 6$ f) $-\infty < x < +\infty$

46 **Expresa como intervalo la parte común de cada pareja de intervalos $(A \cap B)$ e $(I \cap J)$:**

a) $A = [-3, 2]$; $B = [0, 5]$ **b)** $I = [2, \infty)$; $J = (0, 10)$

a) $[0, 2]$ b) $[2, 10)$

47 **Escribe en forma de intervalos los números que verifican estas desigualdades:**

a) $x < 3$ **y** $x \ge 5$ **b)** $x > 0$ **y** $x < 4$

c) $x \le -1$ **y** $x > 1$ **d)** $x < 3$ **y** $x \ge -2$

☛ ***Represéntalos gráficamente, y si son dos intervalos separados, como en a), escribe:*** $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$

a) $(-\infty, 3) \cup [5, \infty)$ b) $(0, 4)$

c) $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ d) $[-2, 3)$

Página 50

48 **Comprueba cuáles de los números –7; –3; –1; 0; 2; 3,5; 5; 7,5; 143 cumplen la desigualdad $|x - 3| \leq 2$. Expresa en forma de intervalos los números que verifican $|x - 3| \leq 2$.**

Cumplen la desigualdad: 2; 3,5 y 5

Todos los números del intervalo [1, 5].

49 **Averigua qué valores de x cumplen:**

a) $|x - 2| = 5$ **b)** $|x - 4| \leq 7$ **c)** $|x + 3| \geq 6$

a) 7 y –3

b) $-3 \leq x \leq 11$; $[-3, 11]$

c) $x \leq -9$ y $x \geq 3$; $(-\infty, -9) \cup [3, \infty)$

50 **Escribe, mediante intervalos, los valores que puede tener x para que se pueda calcular la raíz en cada caso:**

a) $\sqrt{x-4}$ **b)** $\sqrt{2x-1}$ **c)** $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$ **e)** $\sqrt{-x-1}$ **f)** $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$; $[4, +\infty)$

b) $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$; $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

c) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$; $(-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$; $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq x$; $(-\infty, -1]$

f) $1 + \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow 2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$; $[-2, +\infty)$

Logaritmos

51 **Calcula, utilizando la definición de logaritmo:**

a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$

b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$

a) $6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $-5 - 3 - 0 = -8$

52 **Calcula la base de estos logaritmos:**

a) $\log_x 125 = 3$ **b)** $\log_x \frac{1}{9} = -2$

a) $x^3 = 125$; $x = 5$ b) $x^{-2} = \frac{1}{9}$; $x = 3$

53 **Calcula el valor de** x **en estas igualdades:**

a) $\log 3^x = 2$ **b)** $\log x^2 = -2$

c) $7^x = 115$ **d)** $5^{-x} = 3$

a) $x = \dfrac{2}{\log 3} = 4{,}19$ b) $2 \log x = -2$; $x = \dfrac{1}{10}$

c) $x = \dfrac{\log 115}{\log 7} = 2{,}438$ d) $x = -\dfrac{\log 3}{\log 5} = -0{,}683$

54 **Halla con la calculadora y comprueba el resultado con la potenciación.**

a) $\log \sqrt{148}$ **b)** $\log 2{,}3 \cdot 10^{11}$ **c)** $\log 7{,}2 \cdot 10^{-5}$

d) $\log_3 42{,}9$ **e)** $\log_5 1{,}95$ **f)** $\log_2 0{,}034$

a) 1,085 b) 11,36 c) –4,14

d) 3,42 e) 0,41 f) –4,88

55 **Halla el valor de** x **en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:**

a) $\log x = \log 17 + \log 13$ **b)** $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\log x = 3 \log 5$ **d)** $\log x = \log 12 + \log 25 - 2 \log 6$

e) $\log x = 4 \log 2 - \dfrac{1}{2} \log 25$

☛ ***Logaritmo de un producto:*** $\log x = \log (17 \cdot 13)$.

a) $\log x = \log (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \dfrac{36}{9} \Rightarrow x = \dfrac{36}{9} = 4$

c) $\log x = \log 5^3 \Rightarrow x = 5^3 = 125$

d) $\log x = \log \dfrac{12 \cdot 25}{6^2} \Rightarrow x = \dfrac{25}{3}$

e) $\log x = \log 2^4 - \log \sqrt{25}$

$\log x = \log 16 - \log 5$

$\log x = \log \dfrac{16}{5} \Rightarrow x = \dfrac{16}{5}$

56 **Halla el valor de x que verifica estas igualdades:**

a) $3^x = 0{,}005$ **b)** $0{,}8^x = 17$

c) $1{,}5^x = 15$ **d)** $0{,}5^x = 0{,}004$

a) $x = \dfrac{\log 0{,}005}{\log 3} = -4{,}82$ b) $x = \dfrac{\log 17}{\log 0{,}8} = -12{,}70$

c) $x = \dfrac{\log 15}{\log 1{,}5} = 6{,}68$ d) $x = \dfrac{\log 0{,}004}{\log 0{,}5} = 7{,}97$

57 **Calcula x para que se cumpla:**

a) $x^{2,7} = 19$ **b)** $\log_7 3x = 0{,}5$ **c)** $3^{2+x} = 172$

a) $\log x^{2,7} = \log 19 \Rightarrow 2{,}7 \log x = \log 19 \Rightarrow \log x = \dfrac{\log 19}{2{,}7} = 0{,}47$

$x = 10^{0,47} = 2{,}98$

b) $7^{0,5} = 3x \Rightarrow x = \dfrac{7^{0,5}}{3} = 0{,}88$

c) $\log 3^{2+x} = \log 172 \Rightarrow (2 + x) \log 3 = \log 172 \Rightarrow 2 + x = \dfrac{\log 172}{\log 3}$

$x = \dfrac{\log 172}{\log 3} - 2 = 2{,}685$

58 **Si $\log k = x$, escribe en función de x:**

a) $\log k^2$ **b)** $\log \dfrac{k}{100}$ **c)** $\log \sqrt{10k}$

a) $2 \log k = 2x$

b) $\log k - \log 100 = x - 2$

c) $\dfrac{1}{2} \log 10k = \dfrac{1}{2}(1 + x)$

59 **Comprueba que** $\dfrac{\log (1/a) + \log \sqrt{a}}{\log a^3} = -\dfrac{1}{6}$ **(siendo $a \neq 1$).**

$\dfrac{-\log a + 1/2 \log a}{3 \log a} = \dfrac{-1/2 \log a}{3 \log a} = -\dfrac{1}{6}$

Ha de ser $a \neq 1$ para que $\log a \neq 0$ y podamos simplificar.

Problemas aritméticos

60 **Una parcela de 45 m de ancho y 70 m de largo cuesta 28 350 €. ¿Cuánto costará otra parcela de terreno de igual calidad de 60 × 50 m?**

☛ ***Calcula cuánto cuesta un metro cuadrado.***

Hallamos primero el precio del metro cuadrado:

$$45 \cdot 70 = 3\,150 \text{ m}^2 \text{ tiene la primera parcela}$$

$$28\,350 : 3\,150 = 9 \text{ € cuesta 1 m}^2$$

La segunda parcela tiene como superficie: $60 \cdot 50 = 3\,000 \text{ m}^2$

Por tanto, costará: $3\,000 \cdot 9 = 27\,000$ €

61 **Tres informáticos, trabajando 8 horas diarias, hacen un trabajo en 15 días. ¿Cuánto tardarán en hacer ese mismo trabajo 5 informáticos en jornada de 9 horas?**

☛ ***¿Cuántas horas lleva hacer todo el trabajo?***

$3 \cdot 8 \cdot 15 = 360$ horas lleva hacer todo el trabajo.

Trabajando $5 \cdot 9 = 45$ horas diarias, se tardará: $360 : 45 = 8$ días.

62 **Tres empresas invierten 1, 4 y 5 millones de euros, respectivamente, en un negocio que produce, al cabo de un año, 1 800 000 € de beneficio. ¿Cómo se repartirán estos beneficios?**

☛ ***¿Cuántos millones se han invertido en total? ¿Qué beneficio corresponde a cada millón invertido?***

En total se han invertido $1 + 4 + 5 = 10$ millones de euros.

El beneficio que le corresponde a cada millón invertido será:

$$1\,800\,000 : 10 = 180\,000 \text{ €}$$

Por tanto, se repartiría así:

- Primera empresa $\rightarrow$ 180 000 €
- Segunda empresa $\rightarrow 4 \cdot 180\,000 = 720\,000$ €
- Tercera empresa $\rightarrow 5 \cdot 180\,000 = 900\,000$ €

63 **Tres socios aportan 4, 6 y 12 millones, respectivamente, para montar un negocio con la idea de mantenerlo abierto las 24 horas del día. Para compensar las diferencias en la inversión, deciden distribuir las horas de trabajo en relación inversa al dinero aportado. ¿Cuántas horas diarias debe atender el negocio cada uno?**

- Primer socio $\rightarrow$ aporta 4 millones $\rightarrow$ trabajará x horas
- Segundo socio $\rightarrow$ aporta 6 millones $\rightarrow$ trabajará y horas
- Tercer socio $\rightarrow$ aporta 12 millones $\rightarrow$ trabajará z horas

Como el tercero aporta el triple que el primero, trabajará la tercera parte:

$$z = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3z$$

Como el tercero aporta el doble que el segundo, trabajará la mitad:

$$z = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2z$$

Además: $x + y + z = 24$

$$3z + 2z + z = 24 \Rightarrow 6z = 24 \Rightarrow z = 4,\ y = 8,\ x = 12$$

El primero trabajará 12 horas, el segundo 8 horas y el tercero 4 horas.

64 **Dos poblaciones A y B distan 350 km. A la misma hora sale un autobús de A hacia B a una velocidad de 80 km/h y un turismo de B hacia A a 120 km/h. ¿Cuándo se cruzarán?**

☛ ***Se aproximan a 80 + 120 = 200 km/h. ¿Cuánto tardarán en recorrer los 350 km a esa velocidad?***

Si se aproximan a 80 + 120 = 200 km/h, en recorrer 350 km tardarán:

$$t = \frac{350}{200} = 1{,}75 \text{ horas} = 1 \text{ hora y } 45 \text{ minutos}$$

Página 51

65 **Un automóvil tarda 3 horas en ir de A a B y otro tarda 5 horas en ir de B a A. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse si salen simultáneamente cada uno de su ciudad.**

☛ ***¿Qué fracción de la distancia AB recorre cada uno en una hora? ¿Y entre los dos?***

El primero recorre 1/3 del camino en 1 hora.

El segundo recorre 1/5 del camino en 1 hora.

Entre los dos recorren: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ del camino en 1 hora.

Tardarán $\frac{15}{8}$ h = 1h 52' 30" en encontrarse.

CUESTIONES TEÓRICAS

66 **Explica si estas frases son verdaderas o falsas:**

a) Todo número entero es racional.

b) Hay números irracionales que son enteros.

c) Todo número irracional es real.

d) Algunos números enteros son naturales.

e) Hay números decimales que no pueden ser expresados como una fracción.

f) Todos los números decimales son racionales.

g) Entre dos números enteros hay siempre otro número entero.

h) Entre dos números racionales siempre hay infinitos números racionales.

i) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

j) Los números racionales llenan la recta.

a) V	b) F	c) V	d) V	e) V
f) F	g) F	h) V	i) V	j) F

67 **Si $x \in \mathbb{R}$, explica si es verdadera o falsa cada una de estas afirmaciones:**

a) x^2 es siempre positivo o nulo.

b) x^3 es siempre positivo o nulo.

c) $\sqrt[3]{x}$ solo existe si $x \geq 0$.

d) x^{-1} es negativo si lo es x.

e) $-x^2$ es siempre negativo.

a) V b) F c) F d) V e) F (puede ser nulo)

68 **¿Es posible que una potencia de exponente negativo sea igual a un número entero? Acláralo con ejemplos.**

Sí. Por ejemplo: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$

69 **Compara el cuadrado de x con el de $x + 1$. ¿Cómo varía el cuadrado de un número cuando a ese número le añadimos una unidad?**

$$\left.\begin{array}{l}(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \\ (x)^2 = x^2\end{array}\right\} \text{ Varía en } 2x + 1$$

70 **¿Cómo varía el cuadrado de un número x cuando a ese número x lo multiplicamos por 3? ¿Y si lo dividimos entre 2?**

$(3x)^2 = 9x^2 \rightarrow$ Se multiplica por 9

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} = \rightarrow$ Se divide entre 4

71 **¿Cuál es el menor número real perteneciente al intervalo [2, 5)? ¿Y el mayor?**

Escribe un intervalo de la recta real que no tenga ni primer elemento ni último.

El menor es 2. No hay mayor.

Cualquier intervalo abierto no tiene ni primer ni último elemento.

72 **Si $x \in \mathbb{N}$ y $x > 1$, ordena estos números:**

$$\frac{1}{x+1} \qquad x \qquad \frac{1}{x} \qquad -\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{-x-1}$$

$-\frac{1}{x} < \frac{-1}{x+1} < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} < x$

73 **Ordena de menor a mayor los números a, a^2, $1/a$ y $\sqrt{a}$ en estos dos casos:**

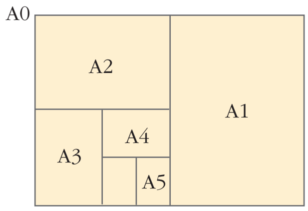
1) Si $a > 1$ **2) Si $0 < a < 1$**

1) $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$ 2) $a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

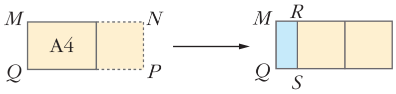
74 **Los tamaños estándar de papel se denominan A0, A1, A2, A3, A4, A5… Cada uno de ellos es la mitad del anterior y semejante a él.**

I Teniendo en cuenta lo anterior y sabiendo que la superficie de A0 es 1 m², calcula las dimensiones de una hoja A4 (que es la de uso más frecuente) redondeando hasta los milímetros. Comprueba el resultado midiendo una hoja A4 que tengas a mano.

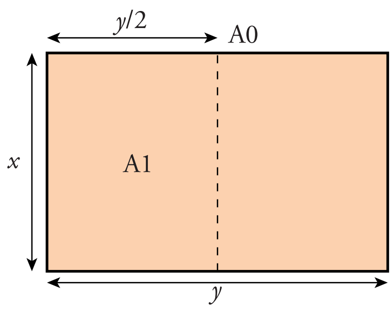


II Demuesta que cualquiera de las hojas anteriores cumple lo siguiente:

Si le añadimos un cuadrado, el rectángulo que se obtiene *MNPQ* tiene la peculiaridad de que al suprimirle dos cuadrados da lugar a otro rectángulo *MRSQ* semejante a él (*MNPQ* semejante a *MRSQ*).



I)



La superficie de A0 es 1 m², es decir:

$$x\,y = 1 \text{ m}^2 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

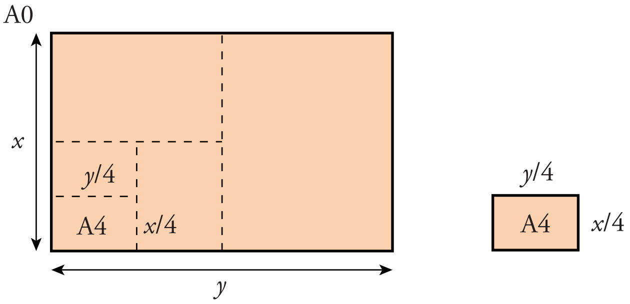
Por la semejanza entre A0 y A1, tenemos que:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y/2} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x^2 \Rightarrow y^2 = 2x^2$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 2x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 2x^2 \Rightarrow 1 = 2x^4 \Rightarrow \frac{1}{2} = x^4$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \quad y = \sqrt[4]{2}$$

Las dimensiones de A0 son: *largo* = $\sqrt[4]{2}$ m, *ancho* = $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ m

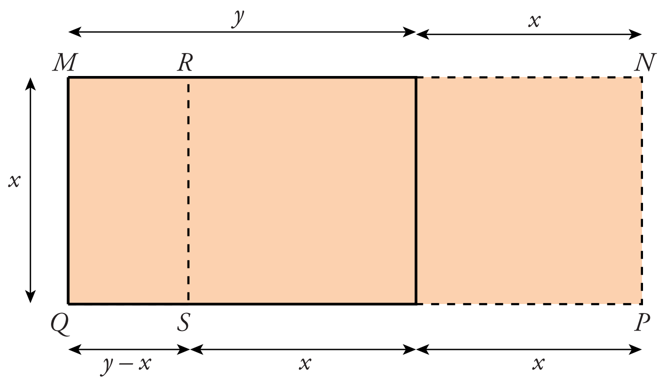


Las dimensiones de A4 serán:

largo = $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{4}$ = 0,297 m = 29,7 cm = 297 mm

ancho = $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{2}}$ = 0,210 m = 21 cm = 210 mm

II)



La razón entre los lados del rectángulo (A0, A1, …) es: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{1/\sqrt[4]{2}} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^2 = \sqrt{2}$

(es la misma en A0, A1…, pues todos ellos son semejantes).

La razón entre los lados del rectángulo *MNPQ* es:

$$\frac{y+x}{x} = \frac{y/x + x/x}{x/x} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2} + 1$$

Queremos probar que *MRQS* es semejante a *MNPQ*; para ello bastará ver que:

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{MR}} = \sqrt{2} + 1$$

Veámoslo:

$$\frac{x}{y-x} = \frac{x/x}{y/x - x/x} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2} + 1$$

Como queríamos probar.

75 **Para numerar las páginas de un libro un tipógrafo ha empleado 2 993 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro? (El 0, el 1, el 2… son *dígitos*. El número 525 se escribe con tres dígitos).**

Las 9 primeras páginas $\rightarrow$ 9 dígitos

De la 10 a la 99 $\rightarrow$ 90 · 2 = 180 dígitos

De la 100 a la 999 $\rightarrow$ 900 · 3 = 2 700 dígitos

Llevamos: 9 + 180 + 2 700 = 2 889 dígitos

Nos faltan: 2 993 – 2 889 = 104 dígitos, que pertenecen a números de cuatro cifras.

Luego: 104 : 4 = 26 páginas más.

Así: 999 + 26 = 1 025 páginas tiene el libro.