

## Página 119

## PRACTICA

## Sistemas lineales

1 Comprueba si el par  $(3, -1)$  es solución de alguno de los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$$

El par  $(3, -1)$  es solución de un sistema si al sustituir  $x$  por 3 e  $y$  por  $-1$ , se verifican ambas igualdades:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 9 + 2 = 11 \end{array} \right\} \rightarrow (3, -1) \text{ es solución del sistema.}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5 \\ 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11 \neq 8 \end{array} \right\}$$

La segunda ecuación no se cumple para  $x = 3$ ,  $y = -1$ . El par  $(3, -1)$  no es solución de este sistema.

2 Completa para que los siguientes sistemas tengan como solución  $x = -1$ ,  $y = 2$ :

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y = \dots \\ 2x + y = \dots \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y = \dots \\ 2x + y = \dots \end{cases} \left\{ \text{Si } x = -1, y = 2 \rightarrow \begin{cases} -1 - 3 \cdot 2 = -1 - 6 = -7 \\ 2 \cdot (-1) + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases} \right.$$

$$\text{Así, } \begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \text{ es el sistema buscado.}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{cases} \left\{ \text{Si } x = -1, y = 2 \rightarrow \begin{cases} 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \end{cases} \right.$$

$$\text{El sistema que tiene como solución } x = -1, y = 2 \text{ es: } \begin{cases} y - x = 3 \\ 2y + x = 3 \end{cases}$$

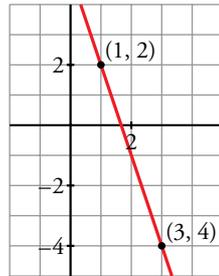
3 Busca dos soluciones para cada una de estas ecuaciones y representa las rectas correspondientes:

$$\text{a) } 3x + y = 5$$

$$\text{b) } 2x - y = 4$$

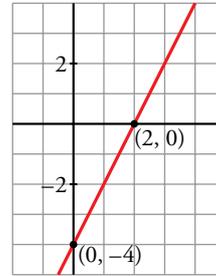
a)  $3x + y = 5$

Soluciones de esta ecuación son,  
por ejemplo: (1, 2) y (3, -4)



b)  $2x - y = 4$

Soluciones de esta ecuación son,  
por ejemplo: (0, -4) y (2, 0)



#### 4 Resuelve gráficamente cada uno de los siguientes sistemas:

a) 
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 4x - y = 7 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

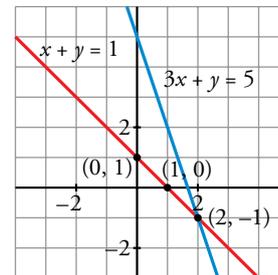
d) 
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$$

a) 
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$3x + y = 5$	$x$	$y$
	0	5
	2	-1

$x + y = 1$	$x$	$y$
	0	1
	1	0

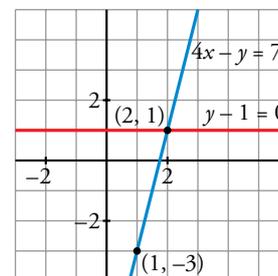


Las rectas se cortan en el punto (2, -1) → La solución del sistema es  $x = 2$ ,  $y = -1$ .

b) 
$$\begin{cases} 4x - y = 7 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación representa a una recta paralela al eje  $X$ ,  $y = 1$ .

La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos (1, -3) y (2, 1).



La solución del sistema es  $x = 2$ ,  $y = 1$ , punto de intersección de ambas rectas.

c) 
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

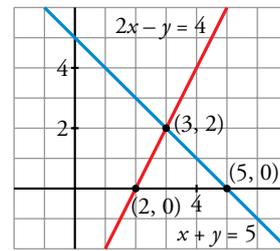
Buscamos dos soluciones para cada una de las ecuaciones:

$$x + y = 5$$

x	y
0	5
5	0

$$2x - y = 4$$

x	y
2	0
3	2



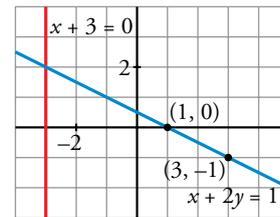
Las dos rectas se cortan en el punto  $(3, 2)$ , luego  $x = 3$ ,  $y = 2$  es la solución del sistema.

$$d) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación tiene como soluciones, por ejemplo, los puntos  $(1, 0)$  y  $(3, -1)$ .

La segunda ecuación es la de una recta paralela al eje  $Y$ ,  $x = -3$ .

Las dos rectas se cortan en el punto  $(-3, 2) \rightarrow$  La solución del sistema es  $x = -3$ ,  $y = 2$ .



**5** Dos de los siguientes sistemas tienen solución única, uno de ellos es incompatible (no tiene solución) y otro es indeterminado (tiene infinitas soluciones). Intenta averiguar de qué tipo es cada uno, simplemente observando las ecuaciones. Después, resuélvelos gráficamente para comprobarlo:

$$a) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

• El sistema c) tiene infinitas soluciones, pues la segunda ecuación es la primera multiplicada por 2. Por tanto, las dos ecuaciones dicen lo mismo.

• El sistema b) es incompatible, sin solución, ya que las ecuaciones son contradictorias:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{array} \right\} \text{ Imposible que se cumplan ambas a la vez.}$$

• Los sistemas a) y d) tienen solución.

Resolvemos gráficamente todos los sistemas para comprobarlo:

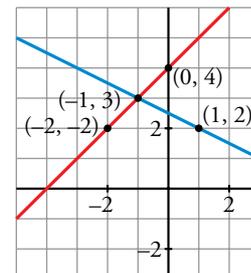
$$a) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

$$x + 2y = 5$$

x	y
1	2
-1	3

$$y - x = 4$$

x	y
-2	2
0	4



Las dos rectas se cortan en  $(-1, 3) \rightarrow$  La solución del sistema es  $x = -1$ ,  $y = 3$ .

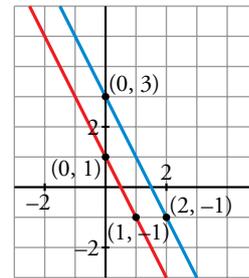
$$b) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$2x + y = 3$$

x	y
0	3
2	-1

$$4x + 2y = 2$$

x	y
0	1
1	-1



Las rectas son paralelas  $\rightarrow$  El sistema no tiene solución.

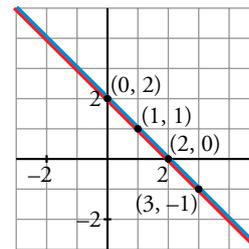
$$c) \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$x + y = 2$$

x	y
0	2
2	0

$$3x + 3y = 6$$

x	y
1	1
3	-1



Se trata de la misma recta  $\rightarrow$  El sistema tiene infinitas soluciones.

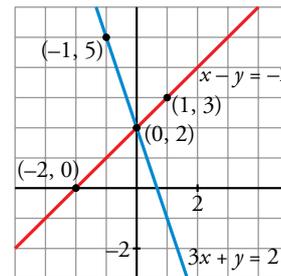
$$d) \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

$$3x + y = 2$$

x	y
0	2
-1	5

$$x - y = -2$$

x	y
-2	0
1	3



El sistema tiene solución única  $x = 0$ ,  $y = 2$ , punto de corte de ambas rectas.

### 6 Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:

$$a) \begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Despejamos } y \text{ de la segunda ecuación y sustituimos en la} \\ \text{primera: } y = -1 - 4x \end{array} \right\}$$

$$3x - 5(-1 - 4x) = 5 \rightarrow 3x + 5 + 20x = 5 \rightarrow 23x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$y = -1 - 4 \cdot 0 = -1$$

$$\text{Solución: } x = 0, y = -1$$

$$b) \begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Despejamos } x \text{ de la segunda ecuación y sustituimos en la} \\ \text{primera: } x = -5 - 6y \end{array} \right\}$$

$$8(-5 - 6y) - 7y = 15 \rightarrow -40 - 48y - 7y = 15 \rightarrow -55y = 55 \rightarrow y = -1$$

$$x = -5 - 6 \cdot (-1) = -5 + 6 = 1$$

$$\text{Solución: } x = 1, y = -1$$

$$c) \begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Despejamos } y \text{ de la segunda ecuación y sustituimos en la} \\ \text{primera: } y = 3x - 7 \end{array} \right\}$$

$$2x + 5(3x - 7) = -1 \rightarrow 2x + 15x - 35 = -1 \rightarrow 17x = 34 \rightarrow x = 2$$

$$y = 3 \cdot 2 - 7 = 6 - 7 = -1$$

$$\text{Solución: } x = 2, y = -1$$

$$d) \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Despejamos } y \text{ de la primera ecuación y sustituimos en la se-} \\ \text{gunda: } y = \frac{3x - 2}{2} \end{array} \right\}$$

$$5x + 4 \cdot \left( \frac{3x - 2}{2} \right) = 7 \rightarrow 5x + 2(3x - 2) = 7 \rightarrow 5x + 6x - 4 = 7 \rightarrow$$

$$\rightarrow 11x = 11 \rightarrow x = 1$$

$$y = \frac{3 \cdot 1 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Solución: } x = 1, y = \frac{1}{2}$$

**7** Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

$$a) \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \frac{x - 3}{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \frac{x - 3}{2} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Igualamos las } y: 2x - 3 = \frac{x - 3}{2} \rightarrow \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow 4x - 6 = x - 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$$

$$y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$\text{Solución: } x = 1, y = -1$$

$$b) \begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Despejamos } y \text{ de cada una de las ecuaciones e igualamos:} \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} y = 8 - 5x \\ y = 2x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8 - 5x = 2x + 1 \rightarrow 7 = 7x \rightarrow x = 1 \\ y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = 1, y = 3$$

$$c) \begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \text{ Despejamos } x \text{ de cada ecuación e igualamos:}$$

$$\begin{cases} x = -2 - 6y \\ x = 1 + 3y \end{cases} \rightarrow -2 - 6y = 1 + 3y \rightarrow -3 = 9y \rightarrow y = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$x = -2 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -2 + 2 = 0$$

$$\text{Solución: } x = 0, y = -\frac{1}{3}$$

$$d) \begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases} \text{ Despejamos } x \text{ de cada ecuación e igualamos:}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5y - 2}{4} \\ x = \frac{10 - 2y}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{5y - 2}{4} = \frac{10 - 2y}{3}$$

$$3(5y - 2) = 4(10 - 2y)$$

$$15y - 6 = 40 - 8y \rightarrow 23y = 46 \rightarrow y = 2$$

$$x = \frac{5 \cdot 2 - 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{Solución: } x = 2, y = 2$$

### 8 Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases} \qquad d) \begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases} \text{ Sumando ambas ecuaciones obtenemos } 8x = 8 \rightarrow x = 1$$

$$3 \cdot 1 + 2y = 4 \rightarrow 2y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Solución: } x = 1, y = \frac{1}{2}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -4x - 10y = -22 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$$

$$\hline -13y = -26 \rightarrow y = 2$$

$$2x + 5 \cdot 2 = 11 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{1}{2}, y = 2$$

$$c) \begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{cases} -3x - 18y = 12 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$$

$$\underline{-23y = 23} \rightarrow y = -1$$

$$x + 6 \cdot (-1) = -4 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Solución: } x = 2, y = -1$$

$$d) \begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \times 3 \\ \times 2 \end{matrix}} \begin{cases} 15x - 6y = 21 \\ 8x + 6y = -4 \end{cases}$$

$$\underline{23x = 17} \rightarrow x = \frac{17}{23}$$

$$5 \cdot \frac{17}{23} - 2y = 7 \rightarrow \frac{85}{23} - 7 = 2y \rightarrow \frac{85}{23} - \frac{161}{23} = 2y \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-76}{23} = 2y \rightarrow y = \frac{-38}{23}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{17}{23}, y = \frac{-38}{23}$$

**9** Resuelve por el método que consideres más adecuado:

$$a) \begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{cases} \qquad d) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Despejamos } y \text{ de la segunda ecuación y la sustituimos en la} \\ \text{primera: } y = -2 \end{array} \right.$$

$$7x + 6 \cdot (-2) = 2 \rightarrow 7x - 12 = 2 \rightarrow 7x = 14 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Solución: } x = 2, y = -2$$

$$b) \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \times 2 \\ \times 3 \end{matrix}} \begin{cases} 10x - 6y = 2 \\ 12x + 6y = 42 \end{cases}$$

$$\underline{22x = 44} \rightarrow x = 2$$

$$5 \cdot 2 - 3y = 1 \rightarrow 9 = 3y \rightarrow y = 3$$

$$\text{Solución: } x = 2, y = 3$$

$$c) \begin{cases} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 6 = y + 7 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

Despejamos  $y$  de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:  $y = 3x - 1$

$$x + 2(3x - 1) = -2 \rightarrow x + 6x - 2 = -2 \rightarrow 7x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$$

Solución:  $x = 0$ ,  $y = -1$

$$d) \left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 18 \\ x + y = 8 \end{array} \right\}$$

Despejamos  $x$  de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:  $x = 8 - y$

$$2 \cdot (8 - y) + 3y = 18 \rightarrow 16 - 2y + 3y = 18 \rightarrow y = 2$$

$$x = 8 - 2 = 6$$

Solución:  $x = 6$ ,  $y = 2$

**10** Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes por el método que consideres oportuno y comprueba la solución que obtengas:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1,25 \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{array} \right.$$

$$d) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{array} \right.$$

$$a) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{array} \right.$$

Por reducción, multiplicamos la 1ª ecuación por  $(-2)$  y sumamos:

$$-4x + 2y = -8$$

$$\underline{4x + 3y = -7}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5y = -15 \rightarrow y = -3 \\ x = \frac{4+y}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Solución: } x = \frac{1}{2}, y = -3$$

$$\text{Comprobación: } \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \frac{1}{2} - (-3) = 1 + 3 = 4 \\ 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-3) = 2 - 9 = -7 \end{array} \right.$$

$$b) \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1,25 \end{cases}$$

Por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por 2 y sumamos:

$$\begin{array}{r} x + 2y = -1 \\ 6x - 2y = -2,5 \\ \hline 7x = -3,5 \end{array} \rightarrow x = \frac{-3,5}{7} = -0,5 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \text{Solución: } x = 0,5, y = -0,25$$

$$y = \frac{-1 - x}{2} \rightarrow y = -0,25$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} -0,5 + 2(-0,25) = -0,5 - 0,5 = -1 \\ 3(-0,5) - (-0,25) = -1,5 + 0,25 = -1,25 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 4y = -5/3 \end{cases}$$

Por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por  $-3$  y sumamos:

$$\begin{array}{r} 3x - 2y = 2 \\ -3x - 12y = 5 \\ \hline -14y = 7 \end{array} \rightarrow y = \frac{-1}{2} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \text{Solución: } x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-5}{3} - 4y \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2 \\ \frac{1}{3} + 4 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{3} - 2 = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{r} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r} x = 2 - 3y \\ x = 7 - 8y \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{r} 2 - 3y = 7 - 8y \rightarrow 5y = 5 \rightarrow y = 1 \\ x = 7 - 8 \cdot 1 \rightarrow x = -1 \end{array}$$

Solución:  $x = -1, y = 1$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} \frac{-1+1}{3} + 1 = 0 + 1 = 1 \\ \frac{-1-3}{4} + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \end{cases}$$

### Página 120

**11** Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\text{a) } \begin{cases} 4(x-3) + y = 0 \\ 3(x+3) - y = 18 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y+1}{5} = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x+4}{5} - y = -1 \\ \frac{x-6}{5} + y = -1 \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} x = \frac{y-4}{3} + 1 \\ y + \frac{1}{3} = \frac{x+4}{3} \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 4(x-3) + y = 0 \\ 3(x+3) - y = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - 12 + y = 0 \\ 3x + 9 - y = 18 \end{cases}$$

$$4x + y = 12$$

$$3x - y = 9$$

$$\underline{7x = 21} \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 3 \cdot 3 - 9 = 0$$

Solución:  $x = 3$ ,  $y = 0$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y+1}{5} = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5x+4y+4}{20} = \frac{20}{20} \\ x+3y=1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 5x+4y=16 \\ x+3y=1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\times(-5)} \begin{array}{r} 5x+4y=16 \\ -5x-15y=-5 \\ \hline -11y=11 \end{array} \rightarrow y=-1$$

$$x + 3 \cdot (-1) = 1 \rightarrow x - 3 = 1 \rightarrow x = 4$$

Solución:  $x = 4$ ,  $y = -1$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x+4}{5} - y = -1 \\ \frac{x-6}{5} + y = -1 \end{cases}$$

$$x + 4 - 5y = -5$$

$$\underline{x - 6 + 5y = -5}$$

$$2x - 2 = -10 \rightarrow x = -4$$

$$-4 + 4 - 5y = -5 \rightarrow -5y = -5 \rightarrow y = 1$$

$$\text{Solución: } x = -4, y = 1$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = \frac{y-4}{3} + 1 \\ y + \frac{1}{3} = \frac{x+4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = y - 4 + 3 \\ 3y + 1 = x + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$y = 3x + 1$$

$$-x + 3(3x + 1) = 3 \rightarrow -x + 9x + 3 = 3 \rightarrow 8x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\text{Solución: } x = 0, y = 1$$

### Sistemas no lineales

**12** Halla las soluciones de estos sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$$

$$x = 1 - y$$

$$(1 - y)y + 2y = 2 \rightarrow y - y^2 + 2y = 2 \rightarrow -y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 0 \\ y_2 = 2 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 1 \\ x_2 = -1, y_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$y = 3 - 2x$$

$$x^2 + (3 - 2x)^2 = 2 \rightarrow x^2 + 9 + 4x^2 - 12x = 2 \rightarrow 5x^2 - 12x + 7 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2 \cdot 5} = \frac{12 \pm 2}{10} \begin{cases} x_1 = \frac{7}{5} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{5} \rightarrow y_1 = 3 - 2 \cdot \frac{7}{5} = \frac{1}{5} \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = \frac{7}{5}, y_1 = \frac{1}{5} \\ x_2 = 1, y_2 = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$y = 3 - 2x$$

$$x(3 - 2x) - (3 - 2x)^2 = 0 \rightarrow (3 - 2x)(x - (3 - 2x)) = 0$$

$$(3 - 2x) \cdot (3x - 3) = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{2} \rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}, y_1 = 0 \\ x_2 = 1, y_2 = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$$

$$x = 1 + y$$

$$(1 + y)^2 + y^2 = 11 - 3(1 + y) \rightarrow 1 + y^2 + 2y + y^2 = 11 - 3 - 3y$$

$$2y^2 + 5y - 7 = 0 \rightarrow y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 9}{4} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = 1 \rightarrow x_1 = 2 \\ y_2 = \frac{-7}{2} \rightarrow x_2 = \frac{-5}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} x_1 = 2, y_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-5}{2}, y_2 = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

**13** Resuelve el sistema siguiente por el método de reducción y comprueba que tiene cuatro soluciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{array} \right\} \text{ Multiplicamos por } -2 \text{ la primera ecuación:}$$

$$-2x^2 - 2y^2 = -148$$

$$\underline{2x^2 - 3y^2 = 23}$$

$$-5y^2 = -125 \rightarrow y^2 = \frac{125}{5} = 25 \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

$$\text{Si } y_1 = 5 \rightarrow x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

$$\text{Si } y_2 = -5 \rightarrow x^2 = 74 - 25 = 49 \begin{cases} x_3 = 7 \\ x_4 = -7 \end{cases}$$

Soluciones:  $x_1 = 7, y_1 = 5; x_2 = -7, y_2 = 5; x_3 = 7, y_3 = -5; x_4 = -7, y_4 = -5$

**14** Busca las soluciones de estos sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$y = 3x - 3$$

$$2x^2 + (3x - 3)^2 = 9 \rightarrow 2x^2 + 9x^2 + 9 - 18x = 9 \rightarrow 11x^2 - 18x = 0$$

$$x(11x - 18) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 18/11 \end{cases}$$

$$\text{Si } x_1 = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow \text{Solución: } x_1 = 0, y_1 = -3$$

$$\text{Si } x_2 = \frac{18}{11} \rightarrow y = \frac{21}{11} \rightarrow \text{Solución: } x_2 = \frac{18}{11}, y_2 = \frac{21}{11}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$$

$$y = \frac{-3x}{2}$$

$$x^2 - x \left( \frac{-3x}{2} \right) = 2 \left( \frac{9x^2}{4} - 4 \right) \rightarrow x^2 + \frac{3x^2}{2} = \frac{9x^2}{2} - 8$$

$$2x^2 + 3x^2 = 9x^2 - 16 \rightarrow 4x^2 = 16$$

$$x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Si } x_1 = 2 \rightarrow y = -3 \rightarrow \text{Solución: } x_1 = 2, y_1 = -3$$

$$\text{Si } x_2 = -2 \rightarrow y = 3 \rightarrow \text{Solución: } x_2 = -2, y_2 = 3$$

**15** Resuelve los siguientes sistemas (no olvides comprobar las soluciones):

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{cases}$$

$$a) \left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{-2}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 3y + 3x = -2xy \end{array} \right\} y = 2 - x$$

$$\begin{aligned} 3(2-x) + 3x &= -2x(2-x) \rightarrow 6 - 3x + 3x = -4x + 2x^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \\ &= \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x_1 = 3 &\rightarrow y_1 = 2 - 3 = -1 \\ x_2 = -1 &\rightarrow y_2 = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

**Comprobación**

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 - 1 = 2 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{-1} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \end{array} \right\} \text{Se verifican ambas ecuaciones.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = -1 \\ y_2 = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -1 + 3 = 2 \\ \frac{1}{-1} + \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \end{array} \right\} \text{Se cumplen ambas ecuaciones.}$$

Solución:  $x_1 = 3, y_1 = -1; x_2 = -1, y_2 = 3$

$$b) \left. \begin{array}{l} y = x + 1 \\ y = \sqrt{x} + 7 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 1 = \sqrt{x} + 7 \rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \rightarrow (x - 6)^2 = x \rightarrow \\ x^2 - 12x + 36 = x \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \rightarrow y = 9 + 1 = 10 \\ 4 \rightarrow y = 4 + 1 = 5 \end{cases}$$

**Comprobación** (de la 2ª ecuación)

$$\begin{aligned} x_1 = 9, y_1 = 10 &\quad \sqrt{9} + 7 = 3 + 7 = 10 \rightarrow \text{Solución válida} \\ x_2 = 4, y_2 = 5 &\quad \sqrt{4} + 7 = 2 + 7 = 9 \neq 5 \rightarrow \text{Solución no válida} \end{aligned}$$

Solución:  $x = 9, y = 10$

**PIENSA Y RESUELVE**

**16** Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,8 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,7 €. ¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow \text{precio de una barra de pan} \\ y \rightarrow \text{precio de un litro de leche} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 6y = 6,8 \\ 3x + 4y = 4,7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times 3} 12x + 18y = 20,4 \\ \xrightarrow{\times (-4)} -12x - 16y = -18,8 \end{array}$$

$$\hline 2y = 1,6 \rightarrow y = 0,8$$

$$4x + 6 \cdot 0,8 = 6,8 \rightarrow 4x + 4,8 = 6,8 \rightarrow 4x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{4} = 0,5$$

Una barra de pan cuesta 0,5 €, y un litro de leche, 0,8 €.

- 17** La suma de dos números es 15. La mitad de uno de ellos más la tercera parte del otro es 6. ¿De qué números se trata?

Llamamos  $x$ ,  $y$  a los números buscados.

$$\text{La suma es } 15 \rightarrow x + y = 15$$

$$\text{La mitad de } x + \text{tercera parte de } y \text{ es } 6 \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ 3x + 2y = 36 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} y = 15 - x \\ 3x + 2(15 - x) = 36 \end{array} \rightarrow 3x + 30 - 2x = 36 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 6 \rightarrow y = 15 - 6 = 9$$

Los números buscados son 6 y 9.

- 18** (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

- 19** Por una calculadora y un cuaderno habríamos pagado, hace tres días, 10,80 €. El precio de la calculadora ha aumentado un 8%, y el cuaderno tiene una rebaja del 10%. Con estas variaciones, los dos artículos nos cuestan 11,34 €.

¿Cuánto costaba cada uno de los artículos hace tres días?

	ANTES DE LA SUBIDA O REBAJA	CON SUBIDA O REBAJA
CALCULADORA	$x$	$1,08x$
CUADERNO	$y$	$0,9y$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10,8 \\ 1,08x + 0,9y = 11,34 \end{array} \right\} \rightarrow y = 10,8 - x$$

$$1,08x + 0,9(10,8 - x) = 11,34 \rightarrow 1,08x + 9,72 - 0,9x = 11,34 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,18x = 1,62 \rightarrow x = \frac{1,62}{0,18} = 9 \rightarrow y = 10,8 - 9 = 1,8$$

Hace tres días, la calculadora costaba 9 €, y el cuaderno, 1,8 €.

- 20** Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €. Después de algún tiempo, los vende por 2 157,50 €. Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%. ¿Cuánto le costó cada uno?

	PRECIO COMPRA	PRECIO VENTA
EQUIPO MÚSICA	$x$	$0,9x$
ORDENADOR	$y$	$0,85y$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2\,500 \\ 0,9x + 0,85y = 2\,157,5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 2\,500 - x \\ 0,9x + 0,85(2\,500 - x) = 2\,157,5 \end{array}$$

$$0,9x = 2\,125 - 0,85x = 2\,157,5 \rightarrow 0,05x = 32,5$$

$$x = 650, \quad y = 1\,850$$

Le costó 650 € el equipo de música y 1 850 € el ordenador.

- 21** En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/kg y otra de 8,50 €/kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea 7 €/kg. ¿Cuánto tiene que poner de cada clase?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE
CAFÉ INFERIOR	$x$	6	$6x$
CAFÉ SUPERIOR	$y$	8,5	$8,5y$
MEZCLA	20	7	140

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 20 \\ 6x + 8,5y = 140 \end{array} \right\} \rightarrow x = 20 - y$$

$$6 \cdot (20 - y) + 8,5y = 140 \rightarrow 120 - 6y + 8,5y = 140 \rightarrow 2,5y = 20 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{20}{2,5} = 8 \rightarrow x = 20 - 8 = 12$$

Necesitan 12 kg de café inferior y 8 kg de café superior.

- 22** ¿Cuántos litros de leche con un 10% de grasa hemos de mezclar con otra leche que tiene un 4% de grasa para obtener 18 litros con un 6% de grasa?

$x$  → litros de leche con un 10% de grasa

$y$  → litros de leche con un 4% de grasa

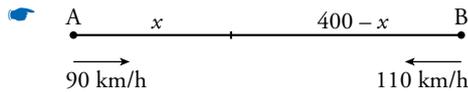
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 18 \\ 0,1x + 0,04y = 0,06(x + y) \end{array} \right\} 0,04x = 0,02y \rightarrow y = 2x$$

$$x + 2x = 18 \rightarrow 3x = 18 \rightarrow x = 6, \quad y = 12$$

Hemos de mezclar 6 litros de leche de un 10% de grasa con 12 litros de leche de un 4% de grasa.

## Página 121

- 23** La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 400 km. Un coche sale desde A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Simultáneamente, sale otro coche desde B hacia A a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse? ¿A qué distancia de A se producirá el encuentro?



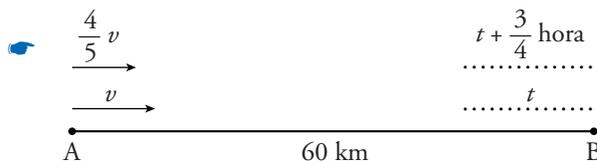
	ESPACIO	VELOCIDAD	TIEMPO
A	$x$	90 km/h	$t$
B	$400 - x$	110 km/h	$t$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$\left. \begin{aligned} 90 &= \frac{x}{t} \rightarrow x = 90t \\ 110 &= \frac{400 - x}{t} \rightarrow 400 - x = 110t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 400 - 90t &= 110t \\ 400 &= 200t \rightarrow t = 2 \end{aligned}$$

Se encontrarán al cabo de 2 h a  $90 \cdot 2 = 180$  km de A.

- 24** La distancia entre dos localidades A y B es de 60 km. Dos ciclistas salen a la vez de A. La velocidad del primero es  $\frac{4}{5}$  de la del segundo y llega  $\frac{3}{4}$  de hora más tarde. ¿Qué velocidad lleva cada uno?



$$\left. \begin{aligned} V_A &\rightarrow \text{velocidad de } A \\ V_B &\rightarrow \text{velocidad de } B \\ t &\rightarrow \text{tiempo que tarda } A \text{ en recorrer los 60 km} \end{aligned} \right\}$$

$$V_A = \frac{4}{5} V_B$$

$$\left. \begin{aligned} 60 &= V_A \cdot t \\ 60 &= V_B \cdot (t - 3/4) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 60 &= (4/5) V_B \cdot t \\ 60 &= V_B \cdot (t - 3/4) \end{aligned} \right\}$$

Dividimos ambas ecuaciones:

$$\frac{60}{60} = \frac{\frac{4}{5} V_B \cdot t}{V_B \cdot (t - \frac{3}{4})} \rightarrow 1 = \frac{\frac{4}{5} t}{t - \frac{3}{4}}$$

$$t - \frac{3}{4} = \frac{4}{5}t \rightarrow t - \frac{4}{5}t = \frac{3}{4}$$

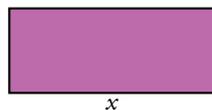
$$\frac{1}{5}t = \frac{3}{4} \rightarrow t = \frac{15}{4}$$

$$V_B = \frac{60}{3} = 20 \text{ km/h}$$

$$V_A = \frac{4}{5} \cdot 20 = 16 \text{ km/h}$$

**25** (ESTÁ RESUELTO EN EL LIBRO).

**26** El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm<sup>2</sup>. ¿Cuáles son sus dimensiones?



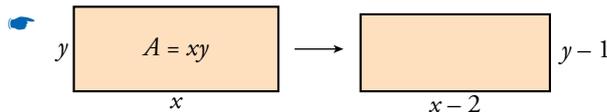
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 20 \\ x \cdot y = 21 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ xy = 21 \end{array} \right\} \rightarrow y = 10 - x$$

$$x(10 - x) = 21 \rightarrow -x^2 + 10x - 21 = 0 \rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{-2} =$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-10 \pm 4}{-2} \begin{cases} x_1 = 7 \rightarrow y_1 = 10 - 7 = 3 \\ x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 10 - 3 = 7 \end{cases}$$

Las dimensiones del rectángulo son 3 cm y 7 cm.

**27** Si acortamos en 2 cm la base de un rectángulo y en 1 cm su altura, el área disminuye en 13 cm<sup>2</sup>. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que su perímetro es de 24 cm.



$$\text{Perímetro} = 2b + 2h = 24 \text{ cm} \rightarrow b + h = 12$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área}_1 = b \cdot h \\ \text{Área}_2 = (b - 2)(h - 1) \end{array} \right\} \text{Área}_2 = \text{Área}_1 - 13$$

$$(b - 2)(h - 1) = b \cdot h - 13$$

$$b \cdot h - 2h - b + 2 = b \cdot h - 13 \rightarrow 2h + b = 15$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} b + h = 12 \\ b + 2h = 15 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} -b - h = -12 \\ \underline{b + 2h = 15} \end{array}$$

$$h = 3 \rightarrow b = 12 - 3 = 9$$

Solución: La base del rectángulo mide 9 cm y la altura, 3 cm.